НЕЙРОННЫЕ ЦЕПИ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Ланнэ А. А.

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций

Abstract. In the report are considered neural networks (NN), alternate classical and is exhibited, that they are universal approximators and provide globally - optimum solution of a problem of optimization at training. The application NN in problems of synthesis of nonlinear operators of signal processing is considered.
Is exhibited, that the introduction of splitting allows to define and to supply minimum number of inputs NN and, therefore, extreme to simplify a problem of optimization. The role of depth of memory in a stability improvement of mapping an input - output to external actions is discussed.

Введение

Математические и схемотехнические модели нейронных цепей (НЦ) берут свое начало в работах Mc.Culloch и Pitts (1943) [Л1]. Несмотря на многочисленные модификации моделей самих нейронов, структур, составленных из нейронов, концептуальная основа классических НЦ сохранялась – это линейные или нелинейные цепи без памяти, составленные из базовых, как правило, однородных элементов, соединенных между собой определенным образом.

Если оставаться в рамках НЦ без памяти, то практически для любой структуры НЦ соотношение "вход-выход" представляет собой строго структурированное алгебраическое соотношение. Так, для трехслойной НЦ, изображенной на рис.1, это соотношение имеет вид

$$y_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \nu_{ij} \varphi(\sum_{k=1}^{m} W_{ik} x_k + b_i) \qquad (1)$$

Такую цепь часто называют трехслойным перцентроном. Здесь смысл большинства обозначений ясен из рис.1, а $\varphi(\cdot)$ – функция активации или передаточная характеристика нейрона, аргумент, который всегда равен $\sum_{k=1}^{m} W_{ik} x_k + b_i$, где b_i – смещение нейрона с номером i.

Входы НЦ образуют первый открытый слой, нейроны - второй скрытый слой и выходы (сумматоры) – третий открытый слой.

Для НЦ со многими выходами, выходной сигнал – вектор $\vec{y} = [y_1, ... y_j, y_l]^T$.

Если отказаться от однородности нейронов и применять, например, НЦ вида рис. 2 где используются два скрытых слоя, а передаточные характеристики нейронов выбрать следующим образом

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x_j),$$

$$\varphi_i = \varphi_i(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(x_j)),$$

то соотношение "вход-выход" такой цепи будет

$$y = \sum_{i=1}^{2m+1} \varphi_i(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(x_j)) \qquad (2)$$

Соотношение (2) в точности совпадает с формулой (теоремой) Колмогорова [Л2], утверждающей, что произвольная непрерывная функция $y = f(x_1, ... x_m)$ может быть точно представлена суперпозицией функций одной переменной по формуле (2).

Теорема (формула) А.Н. Колмогорова (1957) стала обобщением результата В.И.Арнольда [Л3], который в этом же 1957 году решил 13 проблему Д. Гильберта, опровергнув предположение Гильберта о том, что непрерывная функция трех переменных не представима суперпозицией функции двух переменных [Л4].

Значение событий вокруг 13 проблемы Гильберта для прикладных задач состоит в том, что доказана принципиальная возможность структурировать произвольные непрерывные функции m переменных, что принципиально для многих задач теории систем, цепей и сигналов. С точки зрения теории НЦ доказано, что, по крайней мере, неоднородная НЦ может моделировать любые непрерывные отображения вида $y = f(x_1, ... x_m)$.

Практическая слабость упомянутых и более поздних результатов на ту же тему [Л5] состоит, во-первых, в том, что передаточные характеристики нейронов оказываются экзотическими и практически нереализуемы и, во-вторых, что точное моделирование соотношений $y = f(x_1, \dots x_m)$ на практике невозможно, да и не требуется.

Аппроксимационный подход, когда заданная на компактном множестве $G_x (\vec{x} \in G_x)$ функция $f(\vec{x})$ приближается с помощью передаточной характеристики НЦ, например, (1) исследовался несколькими группами авторов. Полученные результаты практически одновременно (1989 г.) были опубликованы в [Л6-8], во многом основаны на теореме Стоуна-Вейерштрасса [Л9].

Пусть передаточная характеристика каждого нейрона скрытого слоя НЦ (рис. 1) описывается строго возрастающей функцией $\varphi(x)$, такой, что $\varphi((-\infty, \infty)) = (0, 1)$.

Тогда для любой непрерывной функции $f(\vec{x})$, определенной на компакте G_x, существует НЦ с n нейронами во внутреннем слое (n - конечно) такая, что

$$\rho\{ f(\vec{x}), \sum_{i=1}^{n} \nu_{ji} \varphi(\sum_{k=1}^{m} W_{ik} x_k + b_i)\} < \varepsilon, \ \ \vec{x} \in G_x ,$$

где ρ – расстояние, определенное в метрике пространств *C* и *L*2 и *ε*, – произвольное малое число, *ε>0*.

Функция $\varphi(\nu)$ может иметь разные выражения. Например,

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{1 - e^{-\nu a}} \to \begin{cases} 1, \ \nu \to \infty \\ 0, \ \nu \to -\infty \end{cases} \qquad (3)$$

Приведенный результат позволяет утверждать, что НЦ рис. 1 с нелинейными (сигмоидными) передаточными характеристиками нейронов (формула (3)) является универсальным аппроксиматором. Следует заметить, что универсальными аппроксиматорами являются и другие НЦ с иными передаточными характеристиками нейронов, например, НЦ с радиально-базисными передаточными характеристиками (RBF-НЦ) [Л10, 11].

Для целей обработки сигналов, когда входной сигнал $x(\cdot)$ представляет собой функцию (или вектор-функцию) непрерывного или дискретного времени, отклик в момент времени t определяется почти всегда некоторой предысторией входного сигнала. Для учета этого обстоятельства вводятся линейные цепи с памятью (линии задержки (Л3)), либо иные линейные цепи рис.3 и рис. 4)

Оказывается, что цепи рис. 3 и 4 при определенных условиях также являются универсальными аппроксиматорами, но уже не функций, а операторов.

Если аппроксимирующий оператор имеет "затухающую память" (это практически означает, что память конечна), то НЦ рис. 3 и 4, а также НЦ с векторными входами и выходами могут как угодно точно в метриках *C* и *L*2 аппроксимировать подобные операторы. Основные результаты по этому поводу представлены в [Л12,13].

Оценивая аппроксимационные свойства НЦ и возможности их практической реализации необходимо отметить, что в рамках цитированных исследований задачи построения НЦ разделяются на две составляющих:

- построение НЦ без памяти;
- построение предпроцессорной линейной цепи.

Первая задача – построение НЦ без памяти, как правило, сводится к оптимизационной и решается, соответствующими методами. Главная проблема в этой части - нелинейный характер задачи и, как следствие, возможные решения в виде локальных минимумов и стационарных точек. В сложных задачах с большим числом нейронов локальных минимумов может быть очень много. В такой ситуации трудно идентифицировать причины неудач: то ли это локальный минимум в условиях, когда на самом деле глобальный минимум обеспечивает заданное качество решения, то ли при выбранной сложности желаемого решения не существует и необходимо увеличить количество нейронов.

Вторая задача связана с определением необходимого числа отводов в (Л3), величины задержки одного элемента, числа и характеристик четырехполюсников в схеме рис. 4.

В докладе излагаются основные результаты альтернативного подхода к решению тех же задач обработки сигналов, что обеспечивают НЦ. Это позволяет использовать конкурирующие решения, а так же обосновать и оптимизировать некоторые результаты в теории и практике. НЦ.

2.Синтез нелинейных операторов на основе расщепления сигналов

Основу альтернативного подхода составляют следующие исходные положения [Л14-16]:
а) Аппроксимируемый оператор F задается множеством входных X и выходных Y^0 сигналов и функциональным бинарным отношением $R \in X \times Y^0$. Сигналы x определены на интервале $[0,\ t_x]$, а y - на интервале $[t_0, t_1],\ t_0 \geq 0,\ t_1 > t_0$.

Если сигналы $x(\cdot)$ и $Y^0(\cdot)$ параметризованы, то *R* представляется наглядным соотношением $F\{x(t, \vec{a})\} = Y^0(t,\ \vec{a})$, где $\vec{a} = [a_1,\ a_2 \ldots]^T$ – конечномерный или бесконечномерный числовой вектор.

б) Аппроксимирующий оператор ищется в виде

$$F_э = \sum_{j_1}^{n_1} \ldots \sum_{j_n}^{n_m} C_{j_1 \ldots j_n} [x_{p1}(t, \vec{a})]^{j_1} \ldots [x_{pm}(t, \vec{a})]^{jm}.$$

в) $x_{p1}, \ldots\ x_{pm}$ – преобразованные входные сигналы, т.е.

$x_{p1}(t, \vec{a}) = F_{p1}\{x(t,\ \vec{a})\}\ \ldots\ x_{pm}(t,\ \vec{a}) = F_{pm}\{x(t,\ \vec{a})\}$, подчиненные условиям

$$\begin{aligned} &\vec{x}_p(t,\ \vec{a}) \neq \vec{0},\ \ \vec{x}_p(t_\alpha, \vec{a}_\alpha) \neq \vec{x}_p(n_\beta,\ \vec{a}_\beta) \\ &\text{при } \mathrm{n}_\alpha \neq n_\beta \text{ и(иил } \vec{\mathrm{a}}_\alpha \neq \vec{a}_\beta \\ &\text{где } \vec{\mathrm{x}}_\mathrm{p}(t, \vec{a}) = [x_{p1},\ x_{p2},\ \ldots x_{pm}]^T. \end{aligned} \tag{4}$$

Операторы F_{pi} в общем случае могут быть линейными или нелинейными, стационарными или нестационарными. Векторы $\vec{x}_p$, для которых выполняется условие (4) называются *расщепленными*, а процедура превращения сигналов $x(t,\ \vec{a})$ в расщепленные сигналы $\vec{x}(t,\ \vec{a})$ – *расщеплением.*

Основной результат, на котором базируется все остальное, может быть сформулирован следующим образом [Л16].

Пусть $X \in G$ – компактное множество непрерывных и ограниченных входных сигналов, F-непрерывный оператор и $F : X \to Y^0$.

Пусть P_n – проекционный оператор, проектирующий *C* на *Cn* так, что для всех $x \in X$ $\rho(x,\ C_n) < \delta$, где $\rho(x,\ C_n) = \min\limits_{x_n \in C_n} \|x - x_n\|$ – расстояние от *x* до *Cn.*

Теорема. По всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ и такой оператор $F_э$, что для любой функции $x \in X$ и $\Delta x \in C$, таких что $\|\Delta x\| \leq \delta$ выполняется неравенство

$$\|F(x) - F_э(x + \Delta x)\| < \varepsilon$$

при этом

$$F_э(x) = \sum_{j_1}^{n_1} \ldots \sum_{j_m}^{n_m} C_{j1 \ldots jm} (F_{p1}(P_n(x(t))))^{j1} \ldots (F_{pm}(P_n(x(t))))^{jm} \tag{5}$$

Доказательство базируется на теореме Стоуна-Вейерштресса. Приведенная теорема конструктивна в следующих отношениях:

- Из теоремы следует функциональная схема универсального аппроксиматора операторов (рис.5). Схема состоит из проектора (в известном смысле обобщенного фильтра), расщепителя и нелинейного функционального преобразователя – нелинейного многополюсника без памяти. Последний осуществляет преобразование $[x_{p1},\ \ldots x_{pm}] \to y^0$ с заданной точностью и в этом смысле является аналогом НЦ без памяти. На основании теоремы Стоуна-Вейерштресса нелинейный многополюсник также является универсальным аппроксиматором функций. При этом конструкция (5) может быть различной [Л15]. В любом случае, и это обстоятельство принципиально, если выражение (5) имеет форму обобщенного многочлена по системе расщепленных функций из алгебры Стоуна, то параметры $C_{j1}, \ldots C_{jm}$ входят в оптимизационную задачу линейно при использовании метрик *C* и *L*2.
- Если выбран оператор-проектор *Pn* и осуществлено расщепление, то задача приближения $F_э$ к F сводится к линейной [Л15], если аппроксимация осуществляется в метриках *C* и *L*2.

- Цитированная теорема содержит некоторое утверждение об устойчивости в следующем смысле. Предлагаемый способ аппроксимации операторов обеспечивает устойчивость выхода по отношению к возмущению входа, если это возмущение не превосходит δ ($\|\Delta x\| \le \delta$).

2.1 Построение нелинейного резистивного многополюсника

Возможны различные варианты решения задачи. Один из них – прямое моделирование выражения (5). При этом в зависимости от способа представления многомерного многочлена получаются различные реализации многополюсника [Л 15].
Сказанное удобно пояснить примером.

Пусть $y = \sum_{k1=0}^{2} \sum_{k2=0}^{2} W_{k1} W_{k2} x_1^{k1} x_2^{k2}$. Используя процедуры Горнера-Клепшоу [Л15], имеем

$$
\begin{aligned}
y = {} & W_{00} + \\
& W_{10}x_1 + W_{01}x_2 + \\
& W_{20}x_1^2 + W_{11}x_1x_2 + W_{02}x_2^2 + \\
& W_{30}x_1^3 + W_{12}x_2^2 + W_{03}x_2^3, \quad \text{где} \quad \mathrm{W}_{30} = W_{12} = W_{03} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{3} \nu_i(x_1) \cdot x_2^i, \quad \text{где} \\
& \nu_0(x_1) = W_{00} + W_{10}x_1 + W_{20}x_1^2 \\
& \nu_1(x_1) = W_{01} + W_{11}x_1 \\
& \nu_3(x_1) = 0
\end{aligned}
$$

На базе таких представлений получается несколько реализационных нейронных схем с однородными нейронами во внутренних слоях (рис.6 а,б).

2.2 Расщепление сигналов с линейно входящими параметрами

Пусть $x(t, \vec{a}) = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_k(t)$, т.е. параметры a_k входят линейно. Этот случай исследован полнее других [Л 17, 15]. Расщепление предполагает преобразование скалярных сигналов в векторные: $x(t, \vec{a}) \to [x_{p1}(t, \vec{a}), \ldots x_{pm}(t, \vec{a})]^T$. Последние подчинены условию (4). Геометрически это означает, что фазовые портреты сигналов в фазовом пространстве не пересекаются и не касаются.

Основные результаты состоят в следующем:

Для сигналов $x(t, \vec{a}) = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_k(t)$ всегда может быть построен расщепитель в виде нестационарного оператора F_p. При этом, если $t \in [0,\ t_x]$ и $\vec{a} \in R^l \setminus 0$, то минимальное число каналов расщепления $m = 2l$ [Л 17, 15].

Для некоторых классов сигналов (алгебраических многочленов, тригонометрических многочленов, многочленов по чебышевским системам функций при определенных условиях возможны расщепители в виде стационарных операторов [Л 17, 15]). Последние могут быть реализованы в форме линейных электронных цепей непрерывного либо дискретного времени [Л 15].

Если множество параметров $\vec{a}$, для которых выполняется расщепление, сужено за счет исключения подмножества $[L]\vec{a} \ne \vec{0}$, где [*L*] – матрица порядка $k \times l$, имеющая ранг k, то минимальное число каналов расщепления оказывается равным $m = l + k < 2l.$

Для сигналов с одним линейно-входящим параметром теория расщепления развита весьма полно [Л 17, 15].

Расщепление сигналов может быть осуществлено оператором с памятью и без памяти. При этом память может быть конечной либо бесконечной. Все зависит от класса сигналов. Например, класс сигналов $a_1 \sin t,\ a_1 \in [a_{\min},\ a_{\max}],\ t \in [0,\ 2a]$ можно расщепить с использованием дифференциатора (оператор с бесконечно малой памятью) $F_p(a\sin t) = [a\sin t,\ a\cos t]^T$, можно расщепить с помощью линии задержки $F_p(a\sin t)$ (оператор с памятью)$= [a\sin t, a\cos t]^T$ где, например, $T_3 = \dfrac{\pi}{2}$.

Наличие памяти у оператора F_p в общем случае обязательно. Глубина этой памяти может варьироваться и использоваться как ресурс для повышения устойчивости выхода синтезируемой цепи к возмущению входа [Л 18,19].

В тех случаях, когда глобальное описание класса сигналов не представляется возможным лучшее, что может быть сделано - представить описание сигнала по фрагментам фиксированной длительности. Длительность может быть ассоциирована либо с глубиной памяти идентифицируемого объекта, либо с предполагаемой глубиной памяти синтезируемого объекта (цепи).

В этом случае любые фрагменты сигнала длительностью $T_ф$ ($N_ф$ – для дискретных сигналов) представляются многочленами $\sum\limits_{k=1}^{2} a_k \varphi_k(t)$. Для стационарных операторов расщепления с конечной памятью имеем

$$F_p(x) = [\int\limits_0^{T_ф} h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau,\ ... \int\limits_0^{T_ф} h_m(\tau)x(t-\tau)d\tau]^T \text{ либо}$$

$$F_p(x) = [\sum_{k=0}^{N_ф - 1} h_1(k)x(n-k), ... \sum_{k=0}^{N_ф - 1} h_m(k)x(n-k)]^T.$$

Следовательно, в каждый момент времени, сигнал можно лишь представить его коэффициентами a_k либо их эквивалентными преобразованиями. Таким образом, в число каналов, подключаемых к нелинейному многополюснику оказывается равным l, т.е. $m = l$.

Для оценки возможностей принципа расщепления при синтезе нелинейных операторов рассмотрим простой пример.

<u>Пример.</u> Пусть множество входных сигналов $X = \left\{ x(n,a) = a\,\varphi(n) \ \middle|\ \varphi(n) = \begin{bmatrix} 1,\ n \in [0, N_ф - 1] \\ 0 \text{ для других } n \end{bmatrix} \right\}$, а множество выходных сигналов $Y^0 = \left\{ y^0(n,a) = \begin{bmatrix} f(n,a), t \in [0, N_ф - 1] \\ 0, \text{ для других } n \end{bmatrix} \right\}$.

Если эту задачу решать с помощью нейронной цепи (или любой иной подходящей нелинейной цепи) и линии задержки с отводами, то ясно, что число отводов ЛЗ должно быть равно $N_ф$. Только в этом случае на интервале $[0,\ N_ф - 1]$ можно получить произвольно заданное функциональное отображение $x(n,a) \to Y^0(n,a)$. Для $n \geq N_ф$ отображение $x(n,a) \to 0$ с заданной точностью ε гарантируется тем обстоятельством, что для $n \geq N_ф$ вектора отсчетов на выходах ЛЗ отличаются от таковых для $n < N_ф$ (т.е. расщеплены с ними).

Таким образом, число входов НЦ должно быть равно $N_ф$ и если оно меньше, то задача в общем случае не может быть решена. Эта же задача в рамках теории расщепления решается при использовании НЦ с двумя входами. Важнейшим следствием здесь является резкое уменьшение размерности (сложности) оптимизационной задачи. Стоит напомнить, что упомянутая рпазмерность равна числу входов в НЦ.

Действительно, по результатам теории расщепления сигналов с линейно-входящими параметрами [Л 15, 17] минимальное число каналов расщепления $m = 2$.

В соответствии с леммой 3.3 [Л 15 стр. 78] сигналы на выходе расщепителя $x_{p1}(n)$ и $x_{p2}(n)$ на интервале $[0,\ N_{ф\text{-}1}]$ должны быть подчинены условию $x_{p1}(n) \big/ x_{p2}(n)$ – строго монотонна на $[0,\ N_ф - 1]$.* Подобный расщепитель легко реализовать в виде схемы, изображенной на рис. 7, где импульсная характеристика дискретной цепи

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n \in [0,\ N_ф - 1] \\ 0, & \text{для других } n. \end{cases}$$

Важно заметить, что для $n \geq N_ф$ вектора $[x_{p1},\ x_{p2}]^T$ будут расщеплены с векторами для $n < N_ф$ и таким образом отображение $x(n, \vec{a}) \to 0$ для $n \geq N_ф$ с точностью ε возможно.

Заключение

Наряду с классическими НЦ существуют многочисленные варианты нелинейных цепей без памяти, обладающих свойствами универсальных аппроксиматоров функций многих переменных. В зависимости от способов реализации эти цепи могут быть представлены различными структурами, в том числе и в форме НЦ с однородными или неоднородными нейронами. При этом функции активации (передаточные характеристики нейронов) оказываются отличными от общепринятых.

Замечательным свойством альтернативных НЦ либо предлагаемых нелинейных цепей – универсальных аппроксиматоров является возможность получения глобально-оптимальных решений при аппроксимации (оптимизации) с C и L_2.

Универсальные аппроксиматоры функций являются важнейшими элементами нелинейных операторов при синтезе нелинейных аналоговых либо цифровых цепей и алгоритмов обработки сигналов.

В соответствии с основной теормой об аппроксимации непрерывных операторов [Л16] необходимо применять еще два элемента обработки сигналов: проекторы [Л 18, 19] и расщепители (иногда проекторы удается совместить с расщепителями).

Теория расщепления сигналов с линейно-входящими параметрами и методы построения расщепителей подобных сигналов получили определенное развитие [Л 15, 17]. Однако, многие вопросы теории расщепления остаются открытыми.

Синтез нелинейных операторов на основе расщепления класса сигналов позволяет определить и реализовать минимально-возможное число каналов расщепления и, следовательно, минимальное число входов НЦ, что предельно упрощает задачу оптимизации при обучении НЦ.

При синтезе нелинейных операторов важное значение имеет глубина памяти, что обеспечивается операторами проектирования и расщепления. Установлено [Л 20, 21], что глубина памяти является важным ресурсом при построении операторов (цепей, алгоритмов) малочувствительных к возмущениям входных сигналов.

* Это условие является необходимым и достаточным.

Литература

1. McCulloch W.S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bulletin of Mathematical Biophysics, 1943, v5, pp.115-133
2. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения. ДАН СССР, 1957, т.144, №5 с.953-956
3. Арнольд В.И. О функциях трех переменных. ДАН, 1957, т.114, №4, с.679-681
4. Проблемы Гильберта Под общей ред. П.С. Александрова "Наука", М. 1969, 240с.
5. Sprecher D.A. On the structure of continuous functions of several variables "Trans of the Americat Math. Society", 1965, 115, pp.340-355
6. Cybenko G. Approximation by supperpositions of a sigmoidal functions. "Math. Control Signal Systems", 1989, 115 pp. 303-314
7. Funahashi K. On the approximate realization of continuous mappings by neural networks. "Neural Networks", 1989, v2, pp.183-192
8. Hornik K., Stinchcomb M., White H. Multi-layer feed forward networks are universal approximators. "Neural Networks", 1989, v2, pp.359-366
9. Рудин У. Основы математического анализа. (Пер. с англ. В.П. Хавина) М. Мир, 1978, 320с.
10. Haykin S. Neural networks. A Compzehensive foundation. (Second edition) Prentice Hall. 1999, 842 c.
11. Principe J.C., Euliano N.R., Lefebvre W.C., Neural and adaptive systems: fundamentals though simulations. John Wiley and Sons, 2000, 656p.
12. Sandberg I.W., Xu L. Uniform approximation of multi-demensional myopic maps. "IEEE Trans. On Circuits and Systems" 1997, v 44, pp.477-485
13. Chen T., Chen H. Univesal approximation to nonlinear operators by neural networks with arbitrary activation functions and its applications to dynamic systems. "IEEE Trans. On Neural Networks", 1995, 6, pp.911-917
14. Ланнэ А.А. Синтез нелинейных систем. "Электронное моделирование", 1980, №1, с.60-68
15. Ланнэ А.А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация. Л., ВАС, 1985, 240с.
16. Даугавет И.К., Ланнэ А.А. О полиномиальном приближении нелинейных операторов в пространстве С. "Сибирский математический журнал", 1985, т. XXVI, №4, с.44-48
17. Даугавет И.К. О линейных расщеплениях сигналов. "Методы оптимизации и их приложения" Иркутск, 1982, с.175-188
18. Ланнэ А.А., Соловьева Е.Б. Построение проекторов в задачах синтеза нелинейных алгоритмов цифровой обработки сигналов. "Электронное моделирование", 1999, т.21, №5, с.35-45
19. Ланнэ А.А., Соловьева Е.Б. О построении оптимальных базисов в задачах синтеза нелинейных операторов обработки сигналов. "Доклады международной конференции по телекоммуникациям" С.-Петербург, 2001
20. Даугавет И.К., Ланнэ А.А. Потенциальные оценки точности алгоритмов цифровой обработки сигналов в условиях внешних помех. "Известия ВУЗов", "Радиотехника", 1991, №12, с.4-12
21. Даугавет И.К. Некоторые вопросы приближения операторов. Изд. ЛГУ, 2001

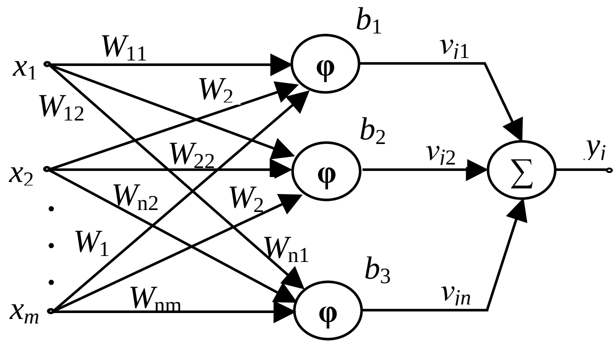


Рис. 1 Структура трехслойной нейронной цепи

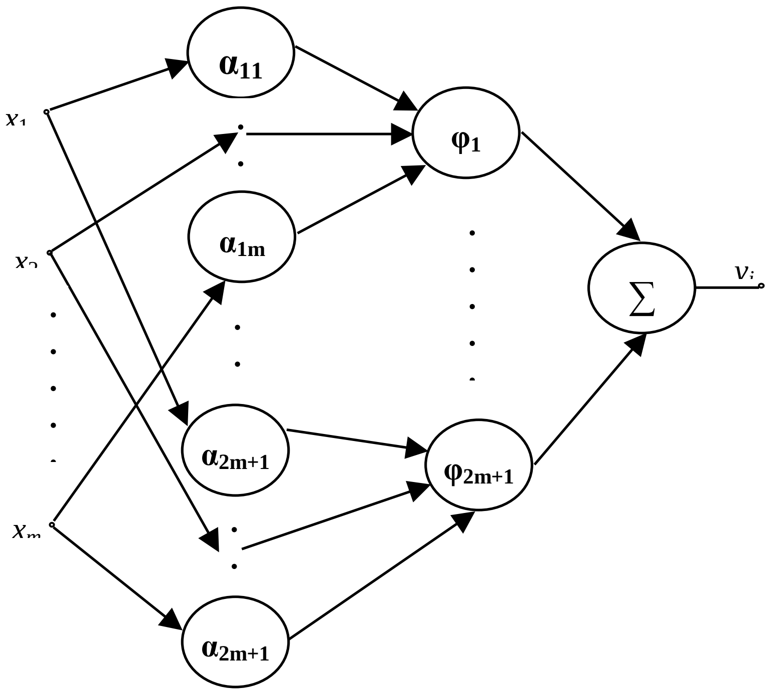


Рис. 2 Нейронная цепь – модель теоремы Колмогорова

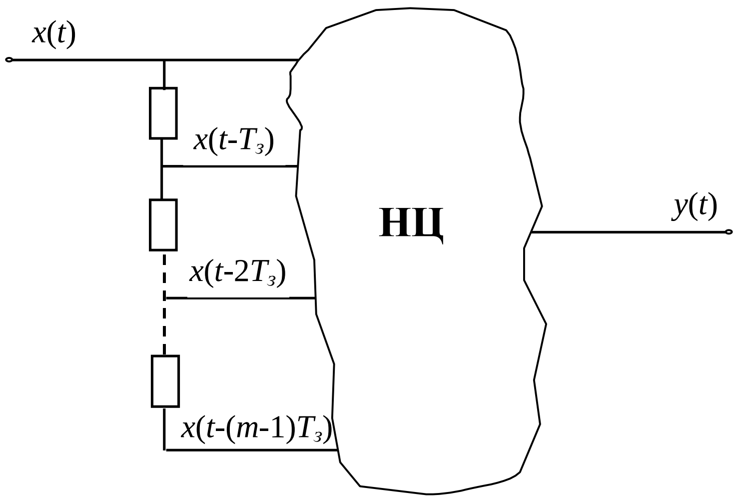


Рис. 3 Нейронная цепь с линией задержки

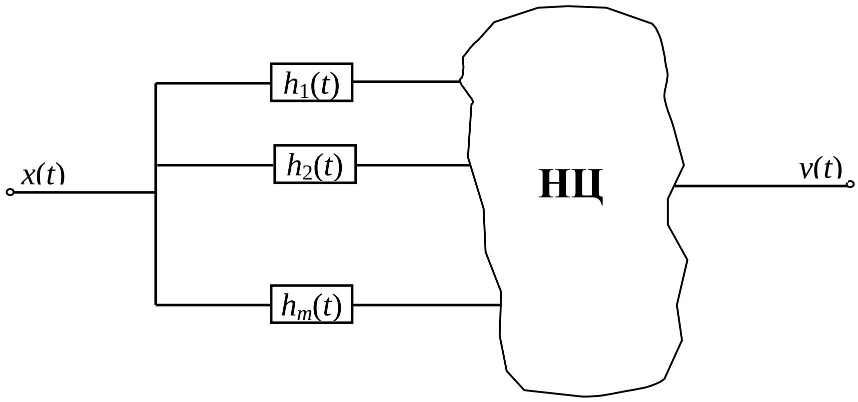


Рис. 4 Нейронная цепь с линейными четырехполюсниками, импульсные характеристики которых – $h_1(t)$,… $h_m(t)$

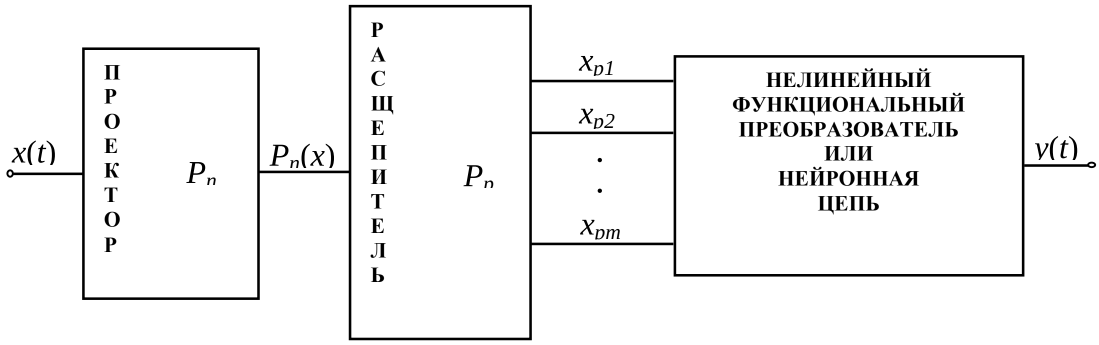
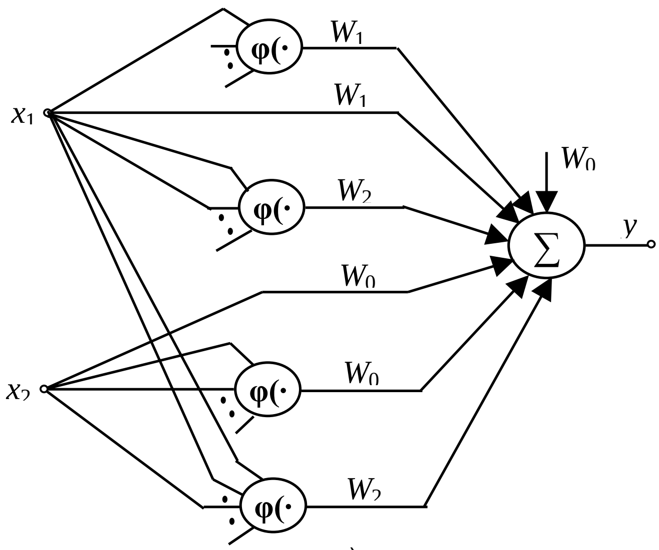
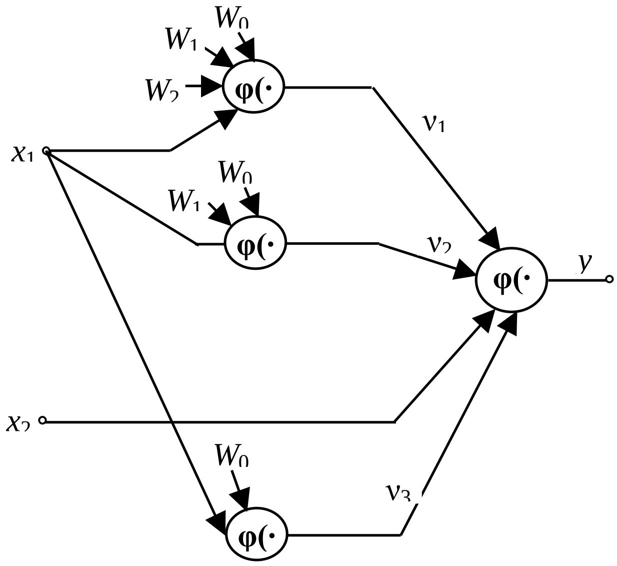


Рис. 5 Функциональная схема универсального аппроксиматора операторов



а)



б)

Рис. 6 а) НЦ с нейронами в виде многовходных умножителей;
б) НЦ с нейронами, передаточные характеристики которых - одномерные алгебраические полиномы

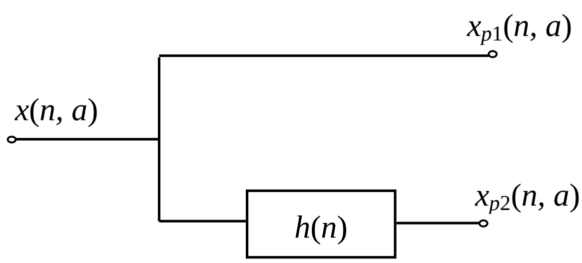


Рис. 7 Схема расщепителя с двумя каналами расщепления (к примеру)