В. Анохин, А. Ланнэ

MATLAB для DSP. Применение многоскоростных фильтров в задачах узкополосной фильтрации

Многоскоростные фильтры и банки фильтров (фильтры и банки фильтров с многочастотной дискретизацией) определили самостоятельное направление в теории и практике цифровой обработки сигналов (ЦОС). В этой связи достаточно упомянуть квадратурно-зеркальные фильтры — новый класс многополосных фильтров, банки многоскоростных фильтров для реализации вейвлет-преобразований, полифазные фильтры. Многоскоростная фильтрация нашла широкое практическое применение в задачах компрессии речи, звука и изображений, построения эффективных систем фильтрации, очистки сигнала от помех, оптимизации вычислительных ресурсов при реализации алгоритмов ЦОС.

Для решения задач анализа (моделирования) и синтеза (проектирования) систем с многочастотной дискретизацией пакет MATLAB предоставляет широкие возможности. В рамках проекта "MATLAB для DSP" рассмотрим частную, но практически важную задачу проектирования и моделирования узкополосного фильтра. Для этих целей, как это и оговорено в проекте, используются два наиболее дружественных для пользователя инструмента MATLAB - Simulink и GUI.
Для удобства читателя в первом разделе статьи приведены краткие теоретические сведения по существу затрагиваемых вопросов. При этом предполагается, что читатель знаком с предметной областью. В последующих разделах на примере решения конкретной задачи - синтез и моделирование узкополосного ФНЧ - излагаются правила и практические рекомендации по использованию инструментов MATLAB.

Основные соотношения теории многочастотной дискретизации.

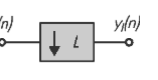
Основы теории многоскоростной фильтрации (многоскоростной обработки сигналов) и описание приложений можно найти в [1-4].

В качестве базовых при многочастотной дискретизации используются:

- M-кратный дециматор (рис. 1), где $Y_D(n) = x(Mn)$;

- L-кратный интерполятор (рис. 2), где

$$y_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & \text{если } n \text{ кратно } L, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$



Таким образом, частота дискретизации f_s сигнала x(n) связана с частотой дискретизации f'_s соотношением $Mf'_s = f'_s$, или соотношением периодов дискретизации T' = MT. Частоты дискретизации сигналов x(n) (частота f_s) и $y_I(n)$ (частота f_s) при интерполяции связаны соотношениями $f'_s = Lf_s$ или T = LT'.

Пример децимации сигнала x(n) при M = 2: отсчёты сигнала до (а) и после (б) децимации.

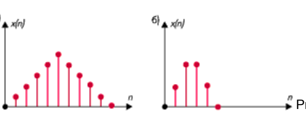


Рис 3.

Пример интерполяции сигнала x(n) при L = 2: отсчёты сигнала до (а) и после (б) интерполяции

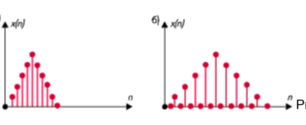


Рис 4.

При децимации и интерполяции сигнала происходит деформация спектров.
Для децимации

$$Y_D(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M}W^k)$$

где z = ejw , а

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{M}}$$

и, следовательно,

$$MY_D(e^{j\bar{\omega}}) = \sum_{k=1}^{M-1} X\left(e^{\frac{j(\bar{\omega}-2\pi k)}{M}}\right)$$

где нормированная частота w = wT', а T' - период дискретизации после децимации. Он будет в M раз больше, так что в шкале ненормированных частот получим

$$MY_D(e^{j\omega T'}) = \sum_{k=1}^{M-1} X\left(e^{\frac{j(\omega-2\pi f'_s k)T'}{M}}\right)$$

Учитывая, что T' = MT , можно записать окончательное соотношение между спектрами децимированного сигнала $Y_D(e^{jw})$ и исходного $X(e^{jw})$:

$$MY_D(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M-1} X\left(e^{j\left(\omega-\frac{\omega_s k}{M}\right)}\right)$$

Для интерполяции $Y_I(z) = X(z^L)$ или $Y_I(e^{jw}) = X(e^{jwL})$ или $Y_I(e^{jw}) = X(e^{jwL})$.
Таким образом, спектр децимированного сигнала является взвешенной суммой исходного спектра $X(e^{jw})$ и его (M–1) сдвинутых по частоте копий (отражений) с шагом $2\Pi w_s/M$. Спектр же интерполированного сигнала является спектром исходного сигнала с изменённым периодом по частоте. Период увеличивается в L раз.
Учитывая упомянутые выше свойства спектра, необходимо перед децимацией ставить фильтр децимации, чтобы исключить наложения спектра, а для интерполяции - фильтр интерполяции для устранения отражений, то есть тех дополнительных компонент спектра, которые попали в рабочую полосу $[0,F_N]$ за счёт увеличения периода спектра.
Замечательные тождества. При построении систем с многочастотной дискретизацией очень полезны преобразования, изображённые на рисунках. Они полезны во многих случаях при реализации фильтров, что будет продемонстрировано в следующем разделе.

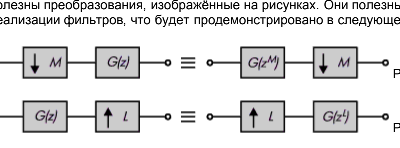


Рис 5.

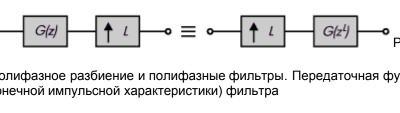


Рис 6.

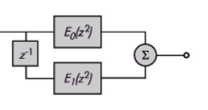
Полифазное разбиение и полифазные фильтры. Передаточная функция нерекурсивного (КИХ - конечной импульсной характеристики) фильтра

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} h(k)z^{-k}$$

может быть представлено суммой

```
H(z) = h(0) + h(2)z-2 + ...
+ h(1)z-1 + h(3)z-3 + ... или
H(z) = h(0) + h(2)z-2 + ...
+ z-1 (H(1) + h(3)z-2 + ...) = E0(z2) + E1(z2) .
```

Смысл многочленов E_0 и E_1 понятен из контекста.Если E_0 и E_1 рассматривать как передаточные функции КИХ-фильтров, то нетрудно заметить, что базовым элементом задержки таких фильтров является z^{-2}, обеспечивающий задержку на два такта. Следовательно, фильтры E_0 и E_1 могут работать на частоте дискретизации, в два раза меньшей исходной. Если использовать разложения по степеням z^{-3} или z^{-4} и так далее, то можно получить блоки фильтров, работающие на ещё более низких частотах дискретизации. Итоговая схема фильтра, когда `H(z) = E0(z2) + z-1E1(z2)` ,показана на рисунке 7.



Рассмотренное разбиение называется полифазным, а реализующие его схемы - полифазными фильтрами.В качестве примера, иллюстрирующего построение полифазного фильтра и использование замечательных тождеств, покажем, как можно эффективно реализовать КИХ-фильтр дециматор.

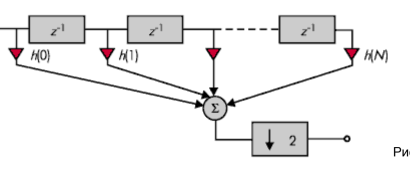


Рис 8.

В схеме рис. 8 для вычисления каждого отсчёта необходимо выполнить N+1 умножений и N сложений. В то же время, за счёт децимации (M = 2) половину результатов отсчётов мы отбрасываем и, следовательно, используем ресурсы вычислителя неэффективно.Построим фильтр на основе полифазного разбиения (полифазный фильтр, рис. 7) и воспользуемся замечательным тождеством (рис. 5). Последовательность преобразований при этом показана на рис. 9.

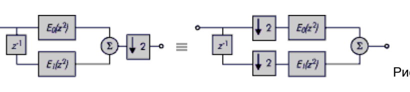


Рис. 9

В результате фильтры $E_0(z^2)$ и $E_1(z^2)$, работающие на частоте f_s, заменяются фильтрами $E_0(z)$ и $E_1(z)$, работающими на частоте $f_s/2$. Таким образом мы получим двукратную эконом ию в скорости вычислений. При коэффициенте децимации M применение полифазных фильтров позволяет получить экономию в M раз. Аналогичные результаты получаются и при полифазном построении фильтров интерполяторов [1,2]. Таким образом, полифазные реализации в совокупности с рациональными преобразованиями схем фильтров позволяют строить эффективные вычислители в задачах ЦОС.

Расчёт узкополосного низкочастотного фильтра.

В процессе цифровой обработки сигналов нередко возникает задача фильтрации сигнала в очень узком частотном диапазоне. Примером такой задачи может служить ситуация, когда сигнал содержит несколько составляющих на близких частотах, и требуется выделить одну из них. Для этого необходимо спроектировать цифровой фильтр с очень узкими относительными полосами пропускания и перехода. В зависимости от расположения составляющих сигнала, это может быть фильтр нижних, верхних частот, полосовой или заграждающий фильтр. Прямое проектирование таких устройств часто приводит к фильтрам очень высоких порядков, практическая реализация которых либо нерациональна, либо невозможна.
Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется дискретный сигнал

$u(n) = \sin(2\pi f_1 nT) + \sin(2\pi f_2 nT) + e(n)$,

где f_1 = 90 Гц и f_2 = 105 Гц - частоты составляющих; T = $1/f_s$ = 1/8000 с - период дискретизации; f_s = 8000 Гц - частота дискретизации; e(n) - гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ^2 = 0,1. Требуется выделить синусоидальную составляющую с частотой f_1. Для этого необходимо построить фильтр нижних частот с граничными значениями частот полосы пропускания f_{pb} и полосы задерживания fsb, удовлетворяющими условию $f_1 < f_{pb} < f_{sb} < f_2$. Поскольку частота Найквиста f_N = $f_s/2$ = 4000 Гц, для нормализованных значений $f_{pb} = f_{pb}/f_N$ и $f_{sb} = f_{sb}/f_N$ это условие будет выглядеть так :

$$\frac{90}{4000} = 0{,}0225 < \bar{f}_{pb} < \bar{f}_{sb} < \frac{105}{4000} = 0{,}02625$$

Следовательно, переходная полоса Δf амплитудно-частотной характеристики фильтра (АЧХ) не должна превышать величину Δf < 0,02625 – 0,0225 = 0,00375. Эти требования схематически показаны на рис. 10.
Для решения сформулированной задачи попробуем спроектировать нерекурсивный фильтр с полосой пропускания от 0 до 95 Гц и полосой задерживания от 100 до 4000 Гц, то есть до частоты Найквиста. Кроме того, потребуем, чтобы АЧХ в полосе пропускания находилась в пределах [0,99, 1,01], а в полосе задерживания не превышала значения 0,0001. Для этого нам необходимо воспользоваться функциями пакета MATLAB, оценивающими по заданным требованиям порядок фильтра и рассчитывающими его коэффициенты. Эти действия удобно выполнять с помощью графической программы (GUI) sptool, входящей в библиотеку signal пакета MATLAB и описанную в [5]. Загрузим эту программу с помощью инструкции sptool и на появившейся главной панели нажмём кнопку New Design, находящуюся под окном Filters. После этого на экране появится панель Filter Designer.
Чтобы рассчитать фильтр, надо ввести данные в поля Sampling Frequency: Fp (верхнее граничное значение полосы пропускания), Rp (максимально допустимая величина пульсаций в полосе пропускания), Fs (нижнее граничное значение полосы задерживания) и Rs (максимально допустимая величина пульсаций в полосе задерживания). Как видно, соответствующие значения пульсаций, вводимые в поля Rp и Rs, должны быть заданы в децибелах (вводятся абсолютные величины). Введём данные, необходимые для расчёта нашего фильтра:

- 8000 - в поле Sampling Frequency;
- 95 и 100 - в поля Fp и Fs, соответственно;
- 20*log10(1,01)–20*log10(0,99) - в поле Rp;
- 80 - в поле Rs, что соответствует ослаблению в 10000 раз.

После нажатия на кнопку Apply появится предупреждение, что оценочное значение порядка проектируемого фильтра 5022 слишком велико, и дальнейшая процедура расчёта может дать непредсказуемые результаты. Однако даже если такой фильтр построен, для его применения потребуется очень большой вычислительный ресурс. Так как коэффициенты фильтра обладают симметрией и общее их количество равно 5023, процессор должен выполнять

(5022/2 + 1) MACs/sample x 8000 samples/sec = 20096000 MACs/sec

(Multiply-And-aCcumulate operations per second - число операций умножения-накопления в секунду, показатель быстродействия процессора). Для хранения коэффициентов потребуется 2512 ячеек памяти.
Альтернативный путь решения рассматриваемой задачи заключается в использовании идей многочастотной дискретизации - последовательном прохождении сигнала через полифазные фильтры. Как было показано, каждый из них выполняет две функции: фильтрацию в заданной полосе и изменение частоты дискретизации выходного сигнала. Прежде всего, для восстановления отфильтрованного сигнала [0, 90] Гц (сигнал содержит только составляющую на частоте 90 Гц), его достаточно дискретизировать с частотой, большей или равной f_{s1} = 2·90 = 180 Гц. Для выделения составляющей с частотой f_s выполним фильтрацию сигнала, используя два полифазных фильтра-дециматора и два полифазных фильтра-интерполятора. Пусть первый фильтр имеет полосу пропускания

$[0, 1/20–0,025]\cdot F_N$ = [0, 100] Гц

и полосу задерживания

$[1/20, 1]\cdot F_N$ = [200, 4000] Гц.

АЧХ в полосе пропускания этого фильтра должна находиться в пределах [0,995, 1,005], а в полосе задерживания - не превышать величину 10^{-4}. Исходя из этих требований, коэффициент децимации M положим равным 20. При этом частота дискретизации на выходе первого фильтра дециматора будет равна 8000/20 = 400 Гц.
Расчёт коэффициентов первого фильтра можно выполнить опять с использованием GUI sptool. Вводимые данные для расчёта:

- 8000 - в поле Sampling Frequency;
- 100 и 200 - в поля Fp и Fs, соответственно;
- 20*log10(1,005)–20*log10(0,995) или 0,08686 - в поле Rp;
- 80 - в поле Rs, что соответствует ослаблению в 10000 раз.

Результаты расчёта дают приблизительную оценку порядка фильтра n_1 = 270, однако полученные значения Actual Rp = 0,1436 и Actual Rs = 75,58 (они отображаются в правой части окна Filter Designer) указывают на необходимость увеличить порядок фильтра и повторить вычисления. В нашем примере мы выбрали значение n_1 = 289, что соответствует Actual Rp = 0,08281 и Actual Rs = 80,16.
Второй фильтр дециматор характеризуется следующими параметрами:

- 400 в поле Sampling Frequency;
- 95 и 100 в полях Fp и Fs, соответственно;
- 0,08686 в поле Rp;
- 80 в поле Rs, что соответствует ослаблению в 10000 раз.

Результаты вычислений дают предварительную оценку порядка фильтра n_2 = 270 и фактические значения Rp и Rs для этого порядка, которые опять-таки не укладываются в заданные требования (пульсации недопустимо большие). Выбор n_2 = = 275 обеспечивает выполнение требований.
Чтобы коэффициенты спроектированных фильтров стали доступны для дальнейшего использования, их надо экспортировать в рабочее пространство MATLAB. Для этого необходимо открыть меню File главной панели sptool и выбрать раздел Export… Если экспортированные структуры имеют имена filt1 и filt2, извлечь соответствующие коэффициенты можно с помощью команд

```
b1=filt1.tf.num;
b2=filt2.tf.num;
```

Применение двух фильтров дециматоров, реализуемых в виде полифазных структур, требует выполнения

290/2 MACs/c · 8000 отсчётов/с · 1/20 + 276/2 MACs/c · 400 отсчётов/с · = 85600 MACs/c ,

и хранения 145 + 138 = 283 коэффициентов.
Для восстановления исходной частоты дискретизации 8000 Гц следует к выходу второго фильтра последовательно подключить два фильтра-интерполятора, причём коэффициент интерполяции первого фильтра равен 2, а второго - 20. С учётом того, что эти фильтры выполняют столько же операций в секунду, сколько и предшествующие им фильтры- дециматоры, общее количество операций умножения с накоплением в секунду будет равно 85600·2 = 171200, а число коэффициентов фильтров - 283.

Моделирование узкополосного низкочастотного фильтра

Описанная процедура может быть легко реализована в виде модели Simulink, для чего нам потребуются следующие блоки:

- генератор синусоидальных колебаний Sine Wave (папка Simulink\ Sources);
- генератор шума Random Number (Simulink\Sources);
- сумматор Sum (Simulink\Math);
- полифазный фильтр-дециматор FIR Decimation (DSP Blockset\Filtering\ Multirate Filters);
- полифазный фильтр-интерполятор FIR Interpolation (DSP Blockset\ Filtering\Multirate Filters);
- анализатор спектра Buffered FFT Frame Scope (DSP Blockset\DSP Sinks);
- осциллограф Scope (Simulink\Sinks).

Правила построения моделей подробно изложены в справочной системе MATLAB, с ними также можно ознакомиться, обратившись к соответствующим источникам [6-8].
Построенная модель, где блоки (F+D)1 и (F+D)2 - это фильтры-дециматоры, а блоки (I+F)1 и (I+F)2 - фильтры-интерполяторы. Перед тем, как её запустить, необходимо задать параметры блоков и режима работы модели. В нашем примере параметры блоков имеют следующие значения:

- Блок (F+D)1. FIR filter coefficients = b1, Decimation factor = 20;
- Блок (F+D)2. FIR filter coefficients = b2, Decimation factor = 2;
- Блок (I+F)2. FIR filter coefficients = b2, Interpolation factor = 2;
- Блок (I+F)1. FIR filter coefficients = b1, Interpolation factor = 20;
- Анализаторы спектра 1 и 5. Параметры блоков одинаковы и указаны на рис. 13;
- Анализаторы спектра 2 и 4. FFT length и Buffer size = 256, Sample time of original time series = 20/8000, остальные - как на рис. 13;
- Анализатор спектра 3. FFT length = = 256 и Buffer size = 128, Sample time of original time series = 20·2/8000, остальные - как на рис. 13;
- Генератор 1. Amplitude = 1, Frequency = 90, Sample Mode = Discrete, Sample Time = 1/8000;
- Генератор 2. Amplitude = 1, Frequency = 105, Sample Mode = Discrete, Sample Time = 1/8000;
- Генератор шума. Mean = 0, Variance = 3e-1, Sample Time = 1/8000.

Параметры режима работы модели устанавливаются в окне Simulation Parameters.

Заключение

Рассмотренный пример наглядно демонстрирует возможности многочастотной дискретизации для решения важных практических задач. Действительно, относительно узкополосные фильтры являются важнейшим элементом радиосистем и в этом смысле имеют большое самостоятельное значение. Помимо этого, многочастотная дискретизация весьма эффективна для построения банков фильтров и для решения задач обработки сигналов с помощью техники вейвлет-разложений.

Литература

1. Vaidyanathan P.P. Multirate Systems and Filter Banks. Prentice Hall. Englewood Cliffs. NY, 1993.
2. Вайдьнатхан П.П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией. Методический обзор. ТИИЭР, 1990. т. 78. № 3. С. 77–120.
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1985.
4. Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. М.: Радио и связь, 1993.
5. Андреев И.В., Ланнэ А.А. MATLAB для DSP: SPTool - инструмент для расчёта цифровых фильтров и спектрального анализа сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2000. № 2. С. 6–13.
6. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Matlab 5.0/5.3. Система символьной математики. М.: “Нолидж”, 1999.
7. Гультяев А.К. Имитационное моделирование в среде Windows. СПб.: КОРОНА принт, 1999.
8. Анохин В.В. Моделирование аналого-цифрового преобразования. В 2-х частях. // Chip-News. 2000. № 2. С. 4–7. Chip-News. 2000. № 3. С. 26–29.