НОВАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Ланнэ А.А.

Санкт-Петербургский Университет Телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича
Кафедра Цифровой Обработки Сигналов
193232 Санкт-Петербург, пр. Большевиков д.24, тел. 5895185
E-mail: arturlan@robotek.ru, http:// www.dsp.sut.ru

1. Введение

Линейные спектральные корни (ЛСК) или спектральные пары (ЛСП) были предложены Итакурой в 1975 году в качестве альтернативы параметрам, отображающим свойства полюсной минимально-фазовой линейной дискретной системы, т.е. системы с передаточной функцией

$$H(z)=\frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}. \qquad (1)$$

До этого момента, да и в последующем, в качестве параметров использовались коэффициенты $\{a_k\}$, нелинейные композиции коэффициентов a_k – коэффициенты отражения α_k и др. [Л.2]. Поиск подходящих параметров для передачи информации о функции $H(z)$ обусловлен проблемами квантования и влиянием помех в канале связи.

При квантовании истинные параметры заменяются их приближенными значениями, а действие помех может существенно изменить значения параметров. Все это приводит либо к катастрофическим событиям – потере устойчивости восстановленной на приеме передаточной функции и соответствующей системы, либо к искажениям ее частотных (временных) характеристик.

Выбор подходящих параметров, прежде всего, связан с уменьшением влияния искажающих факторов.

Кроме того, важно, чтобы выбранные параметры достаточно просто рассчитывались, экономно представлялись, позволяли легко контролировать устойчивость, исключая катастрофические ситуации.

Предложенные Итакурой ЛСП оказались лучшими в указанном выше смысле. И хотя строго этот факт не доказан, на практике конкурирующих параметров пока не найдено.

Линейные спектральные пары Итакуры определяются следующим образом.

Пусть $A_N(z)=1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}$. Образуем два полинома

$$\begin{aligned}P(z)&=A_N(z)+z^{-(N+1)}A_N(z^{-1})\\ Q(z)&=A_N(z)-z^{-(N+1)}A_N(z^{-1})\end{aligned} \qquad (2)$$

Исключая тривиальные корни этих полиномов $z=\pm 1$, получим

$$R_P(z)=\frac{P(z)}{1+z^{-1}},\qquad R_Q(z)=\frac{Q(z)}{1-z^{-1}},\qquad \text{для N - четного}$$

$$R_P(z)=P(z),\qquad R_Q(z)=\frac{Q(z)}{1-z^{-2}},\qquad \text{для N - нечетного.}$$

Порядки полиномов R_P и R_Q, как нетрудно видеть, – $2p$ и $2q$ – соответственно (p и q – целые числа), а сами полиномы симметричные.

Заменяя z на $e^{j\hat{\omega}}$, $\hat{\omega}=\omega T$ и обозначая $x=z+z^{-1}=2\cos\hat{\omega}$, находим

$$\begin{aligned}F_P(x)&=\sum_{n=0}^{p}c_n x^n\\ F_Q(x)&=\sum_{n=0}^{q}\alpha_n x^n\end{aligned}.$$

Доказано [Л.1], что все корни полиномов $F_P(x)$ и $F_Q(x)$ – различны, вещественны, лежат в интервале [-1, 1] и чередуются. Все корни полиномов R_P и R_Q также различны, лежат на единичной окружности и чередуются.

Линейные спектральные корни или, что тоже, линейные спектральные частоты вычисляются по формуле

$$\hat{\omega}_i=\arccos x_i,\qquad i=1,....p+q.$$

Зная $x_i(\hat{\omega}_i)$, нетрудно восстановить многочлены F_P, F_Q, следовательно, R_P и R_Q и, наконец, P(z) и Q(z). После этого восстанавливается полином знаменателя передаточной функции

$$A_N(z)=\frac{P(z)+Q(z)}{2}. \tag{3}$$

Итак, для представления информации о полиноме $A_N(z)$ необходимо вычислить $x_i(\hat{\omega}_i)$. Расчет последних сводится к решению алгебраических уравнений, все корни которых вещественные, различные числа.

Публикации по теории ЛСК посвящены:

- изучению рациональных (экономных и быстрых) методов расчета ЛСП [Л.3,8]*;
- изучению рациональных методов квантования, в особенности векторного квантования, ЛСП и ЛСК [Л. 4,8]*;
- исследованию свойств ЛСП [Л. 5, 6, 7, 8]*;

В [Л. 6, 7, 8] было найдено, что ЛСК Итакуры не единственны и что существуют параметры, качественно обладающие теми же свойствами.

Особенно широко и с большим успехом ЛСК применяются в задачах компрессии речи для компактного представления модели речевого тракта.

Однако понятно, что ЛСК удобно применять в любых задачах, где необходимо экономно передавать, хранить и достаточно точно воспроизводить информацию о полюсных системах, минимально-фазовых системах общего вида, либо системах типа фазовых звеньев. В свете сказанного исследования ЛСК имеют значение для теории и практики ЦОС в целом.

Основной задачей настоящей статьи, обощающей работу [Л. 6], является построение теории ЛСК, в рамках которой известные результаты являются частным случаем. Кроме того, полученные результаты позволяют предъявить к изучению новые варианты спектральных параметров, использование которых может составить конкуренцию классическим ЛСК.

Далее изложение ведется по следующему плану. В разделе 2 изучаются свойства специальных полиномов, которые используются в дальнейшем. В разделе 3 описываются новые способы получения ЛСК. В заключении обсуждаются полученные результаты и перспективы их развития.

2. Полиномы с монотонно убывающей ФЧХ

Пусть $A_N(z)$ – минимально-фазовый полином, т.е. полином, все корни которого лежат внутри единичного круга плоскости Z. Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) полинома A(z) назовем следующую частотную зависимость $\arg A(e^{j\hat{\omega}})$.

Имеет место

Утверждение 1. ФЧХ полинома $z^R A_N(z)$, где $R \geq \frac{N}{2}$ есть монотонно возрастающая функция частоты; при изменении $\hat{\omega}$ от 0 до π ФЧХ возрастает от 0 до Rπ.

Для доказательства представим $A_N(z)$ в виде

$$A_N(z)=a_0(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})\ \ldots\ (1-z_N z^{-1}),$$

где z_i – корни уравнения $A_N(z)=0$, которые могут быть комплексными либо вещественными. В общем случае $z_i = r_i e^{j\varphi}$, где $|r_i|<1$. Пусть $R=\frac{N}{2}$, тогда $z^R A_N(z)=z^{\frac{1}{2}}(1-z_1 z^{-1})\times z^{\frac{1}{2}}(1-z_2 z^{-1})\times\ldots\ z^{\frac{1}{2}}(1-z_N z^{-1})$. Заменив z на $e^{j\hat{\omega}}$, рассмотрим один сомножитель

$$z^{\frac{1}{2}}(1-z_1 z^{-1})\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}=e^{j\frac{\hat{\omega}}{2}}(1-r_1 e^{j\varphi_1}e^{-j\hat{\omega}})=e^{j\frac{\varphi_1}{2}}(e^{j(\frac{\hat{\omega}}{2}-\frac{\varphi_1}{2})}-z_1 e^{-j(\frac{\hat{\omega}}{2}-\frac{\varphi_1}{2})})=A(\hat{\omega})$$

$$\arg A(\hat{\omega})=\frac{\varphi_1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1+z_1}{1-z_1}\operatorname{tg}(\tfrac{\hat{\omega}}{2}-\tfrac{\varphi_1}{2})$$

Анализ последнего выражения свидетельствует, что при любых φ_1 и $|r_1|<1$, $\arg A(\hat{\omega})$ – возрастающая функция частоты при изменении $\hat{\omega}$ в диапазоне от 0 до π.

* Цитированные работы являются примерами, извлеченными из большого числа публикаций, посвященных теории и применению ЛСК.

Отсюда немедленно следует, что $\arg e^{j\frac{N}{2}\hat{\omega}} A_N(e^{j\hat{\omega}})$ при изменении частоты $\hat{\omega}$ от 0 до π монотонно возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}N$ рад, т.е. от 0 до $R\pi$ рад.

Если же $R > \frac{N}{2}$, т.е. $z^R = z^{\frac{N}{2}} z^{R_1}$, $R_1 \geq \frac{1}{2}$, то к монотонно возрастающей ФЧХ полинома $e^{j\frac{N}{2}\hat{\omega}} A_N(e^{j\hat{\omega}})$ добавляется линейная ФЧХ, равная $R_1\hat{\omega}$, что и доказывает утверждение 1.

Утверждение 2. Вещественная и мнимая части полинома $z^R A_N(z)$ выражаются тригонометрическими многочленами вида $\sum_{k=0}^{N} a_k \cos(R-k)\hat{\omega}$ и $\sum_{k=0}^{N} a_k \sin(R-k)\hat{\omega}$, при $a_0 = 1$.

Для доказательства запишем

$$Re\{ z^R A_N(z)\}\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = Re(\hat{\omega}) = \frac{1}{2}\Big(z^R A_N(z) + z^{-R} A_N(z^{-1})\Big)\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$
$$Im\{ z^R A_N(z)\}\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = Im(\hat{\omega}) = \frac{1}{2} j\Big(z^R A_N(z) - z^{-R} A_N(z^{-1})\Big)\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} \qquad (4)$$

Тогда

$$Re(\hat{\omega}) = \frac{1}{2}(z^R + a_1 z^{R-1} + \ldots a_N z^{R-N} + z^{-R} + a_1 z^{-(R-1)} + \ldots + a_N z^{-(R-N)})_{z=e^{j\hat{\omega}}} =$$
$$= \frac{1}{2}[(z^R + z^{-R}) + a_1(z^{R-1} + z^{-(R-1)}) + \ldots + a_N(z^{R-N} + z^{-(R-N)})]_{z=e^{j\hat{\omega}}} =$$
$$= \cos R\hat{\omega} + a_1 \cos(R-1)\hat{\omega} + \ldots + a_N \cos(R-N)\hat{\omega}.$$

Аналогично доказывается соотношение

$$Im(\hat{\omega}) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(R-k)\hat{\omega}. \qquad (5)$$

Утверждение 3. Вещественная и мнимая части полинома $z^R A_N(z)$ в зависимости от R могут быть выражены следующим образом

$$Re(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{R} \tilde{a}_k \cos^k \hat{\omega}, \text{ если R - целое;}$$
$$Re(\hat{\omega}) = \cos\frac{\hat{\omega}}{2} \sum_{k=0}^{R-\frac{1}{2}} \tilde{b}_k \cos^k \hat{\omega}, \text{ если R - дробное;}$$
$$Im(\hat{\omega}) = \sin\hat{\omega} \sum_{k=0}^{R-1} \tilde{c}_k \cos^k \hat{\omega}, \text{ если R - целое;} \qquad (6)$$
$$Im(\hat{\omega}) = \sin\frac{\hat{\omega}}{2} \sum_{k=0}^{R-\frac{1}{2}} \tilde{d}_k \cos^k \hat{\omega}, \text{ если R - дробное.}$$

Доказательство приведенных соотношений немедленно следует из таблицы 3.3 [Л. 9 стр. 146],, если $Re(\hat{\omega})$ и $Im(\hat{\omega})$ представить в виде

$$Re(\hat{\omega}) = \frac{1}{2}(z^R A_N(z) + z^{-R} A_N(z^{-1}))\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$
$$Im(\hat{\omega}) = \frac{1}{2j} z^R(A_N(z) - z^{-R} A_N(z^{-1}))\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

и заметить, что $A_N(z) + z^{-2R} A_N(z^{-1})$ и $A_N(z) - z^{-2R} A_N(z^{-1})$ есть передаточные функции КИХ-фильтров с линейной ФЧХ (Формулы табл.3.3 как раз и справедливы для таких функций).

Из приведенных формул (6) следует:

1. При любых значениях параметров

$$Re(\hat{\omega})\big|_{\hat{\omega}=\pi}=0, \qquad \text{если} \quad \text{R - дробное},$$
$$\operatorname{Im}(\hat{\omega})\big|_{\hat{\omega}=0,\hat{\omega}=\pi}=0, \qquad \text{если} \quad \text{R - целое}, \tag{7}$$
$$\operatorname{Im}(\hat{\omega})\big|_{\hat{\omega}=0}=0, \qquad \text{если} \quad \text{R - дробное}.$$

Следовательно, $\operatorname{Re}(\hat{\omega})$ и $\operatorname{Im}(\hat{\omega})$ имеют ряд вполне определенных, не зависящих от a_k корней. Эти корни будем называть тривиальными.

2. Каждая сумма косинусов в формулах (6) заменой переменных $\cos\hat{\omega}=x$ может быть преобразована к алгебраическому полиному степени R или (R-i) (если R – целое) или $R-\frac{1}{2}$ (если R – дробное). Такая замена переводит интервал частот [0, π] в интервал оси x – [-1, 1].

3. Обобщение теории Итакуры и альтернативные варианты построения ЛСК

Утверждение 4. Вещественная часть полинома $z^R A_N(z)\big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$ имеет нули на частотах $\hat{\omega}_{R_i}$, при которых $\arg\{e^{j\hat{\omega}R}A_N(e^{j\hat{\omega}})\}$ принимает значения $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0,1,d=[R-\frac{1}{2}]$, а мнимая часть этого же полинома – на частотах $\hat{\omega}_{I_i}$, при которых $\arg\{e^{j\hat{\omega}R}A_N(e^{j\hat{\omega}})\}$ равен $2k\frac{\pi}{2}$, $k=0,1,d=[R]$, где [·] означает ближайшее не большее целое.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$e^{j\hat{\omega}R}A_N(e^{j\hat{\omega}})=Re(\hat{\omega})+j\,Im(\hat{\omega})=|\cdot|e^{j\theta(\hat{\omega})},$$

где $\theta(\hat{\omega})$ монотонно возрастает от 0 до πR при изменении частоты от 0 до π (Утверждение 1). Так как A(z) – устойчивый многочлен с корнями внутри единичного круга, то $|\cdot|>0$, при $\hat{\omega}\in[0,\pi]$. Следовательно, $\operatorname{Re}(\hat{\omega})=|\cdot|\cos\theta(\hat{\omega})$ образуется в ноль на частотах $\hat{\omega}_{R_i}$, где $\theta(\hat{\omega})=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0,1,\ldots d=[R-\frac{1}{2}]$. Аналогично, $\operatorname{Im}(\hat{\omega})=|\cdot|\sin\theta(\hat{\omega})$ образуется в ноль на частотах $\hat{\omega}_{I_i}$, где $\theta(\hat{\omega})=k\pi$, $k=0,1,\ldots d=[R]$. Здесь важно, что число частот $\hat{\omega}_{R_i}$ и $\hat{\omega}_{I_i}$, т.е. число корней $\operatorname{Re}(\hat{\omega})$ и $\operatorname{Im}(\hat{\omega})$ на интервале [0, π] равно

для $\operatorname{Re}(\hat{\omega})$ – R, если R – целое, и $R+\frac{1}{2}$, если R – дробное

для $\operatorname{Im}(\hat{\omega})$ – R+1, если R – целое, и $R+\frac{1}{2}$, если R – дробное.

Важное следствие установленных фактов получается, если объединить результаты утверждений 3 и 4. Его содержание состоит в том, что $\operatorname{Re}(\hat{\omega})$ и $\operatorname{Im}(\hat{\omega})$ имеют на интервале [0, π] только вещественные корни. (Равно и алгебраические полтномы, образованные из сумм косинусов имеют только вещественные корни). Эти корни простые, различные и чередуются.

При этом число коэффициентов a_k исходного многочлена и число нетривиальных корней многочленов $\operatorname{Re}(\hat{\omega})$ и $\operatorname{Im}(\hat{\omega})$ на интервале [0, π] находятся в следующей зависимости.

Общее число корней функций $\operatorname{Re}(\hat{\omega})$ и $\operatorname{Im}(\hat{\omega})$ на интервале [0, π] равно $\sum_{\text{корней}}=2R+1$.

Таким образом, общее число нетривиальных корней $\sum_{\text{н.к.}}=2R-1$. Детализированная картина распределения корней показана в таблице 1.

Таблица 1

	$\operatorname{Re}(\hat{\omega})$		$\operatorname{Im}(\hat{\omega})$	
R	число нетрив. корней	число трив. корней	число нетрив. корней	число трив. корней
R-целое	R	–	R-1	2
R-дробное	$R-\frac{1}{2}$	1	$R-\frac{1}{2}$	1

Утверждение 5. Различные варианты линейных спектральных корней могут быть получены из решения уравнений

$$Re\{ z^R A_N(z)\}_{z=e^{j\hat{\omega}}} = 0$$

$$Im\{ z^R A_N(z)\}_{z=e^{j\hat{\omega}}} = 0, \ \text{при}\, R \geq \frac{N}{2}.$$

При этом для $R = \frac{N}{2}$ получается минимально возможный порядок уравнений, при $R = \frac{N+1}{2}$ – случай Итакуры, при $R > \frac{N+1}{2}$ – избыточное число параметров, при R=N – можно ограничить решением одного уравнения.

Для доказательства перепишем приведенные уравнения в виде

$$Re(\hat{\omega}) = \tfrac{1}{2}\{ z^R A_N(z) + z^{-R} A_N(z^{-1})\}_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

$$Im(\hat{\omega}) = \tfrac{1}{2j}\{ z^R A_N(z) - z^{-R} A_N(z^{-1})\}_{z=e^{j\hat{\omega}}} \qquad \text{или}$$

$$\mathrm{Re}(\hat{\omega}) = \tfrac{1}{2} z^R\{ A_N(z) + z^{-2R} A_N(z^{-1})\}_{z=e^{j\hat{\omega}}} \tag{8}$$

$$Im(\hat{\omega}) = \tfrac{1}{2j} z^R\{ A_N(z) - z^{-2R} A_N(z^{-1})\}_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

Очевидно, что нули $\mathrm{Re}(\hat{\omega})$ и $\mathrm{Im}(\hat{\omega})$ образуются только за счет полиномов, стоящих в фигурных скобках.

1. Если $R = \frac{N}{2}$, $2R = N$ и в соответствии с утверждением 3 степени полиномов Re и Im будут R и R–1, если R – целое и $R - \frac{1}{2}$, если R – дробное. Таким образом, общее число определяемых корней равно N–1 и для полной информации о многочлене $A_N(z)$ необходимо передать значение еще одного параметра, например, масштабного множителя при $\mathrm{Im}(\hat{\omega})$.
2. Если $R = \frac{N+1}{2}$, то формулы (8) превращаются в соотношения Итакуры. Число корней оказываются равными N.
3. Если $R > \frac{N+1}{2}$, то общее число корней уравнений (8) становится больше N и, следовательно, избыточно.
4. Если R=N, то число корней уравнения для $\mathrm{Re}(\hat{\omega})$ равно N, а для $\mathrm{Im}(\hat{\omega})$ – N-1. Следовательно, для полной информации о многочлене $A_N(z)$ достаточно передать N корней $\mathrm{Re}(\hat{\omega})$ или N-1 корней $\mathrm{Im}(\hat{\omega})$ и масштабный множитель.

4. Заключение

Полученные в работе результаты позволяют сделать ряд важных выводов и предложений.

- Идея спектральных частот (корней), предложенная в [Л.1], на самом деле может быть реализована по-разному в том смысле, что существуют разнообразные варианты ЛСК.
- Предложенная теория ЛСК дает возможность "генерировать" варианты ЛСК, изменяя параметр R. Так, при $R = \frac{N+1}{2}$ имеет место случай, изученный Итакурой и повсеместно используемый в исследованиях и разработках.
- Разнообразие вариантов ЛСК, позволяет ставить задачу оптимизации, в частности, по критерию чувствительности.
- Базовые уравнения (8) устанавливают тесную связь теории ЛСК и КИХ-фильтров с линейными ФЧХ.
- Наконец, изучение конкретных ситуаций, например, важной в задачах компрессии речи проблемы экономной передачи параметров линейного предсказания, делает актуальной задачу детального исследования рациональных способов вычисления и квантования ЛСК при N=10. Действительно, при N=10 и $R = \frac{N}{2} = 5$ вместо двух уравнений 5-ой степени при методе Итакуры, необходимо решать одно уравнение 5-ой и одно уравнение 4-ой степени. Последнее может быть решено в радикалах.

Открытым остается вопрос о выборе параметров квантования. Новая теория позволяет в качестве таковых выбирать различные сочетания ЛСК и коэффициентов линейного предсказания.

Библиография

1. Itakura F. Line spectrum representation of linear prediction coefficients of speech signals. J. Ac. Soc. Am. 1975, v.57 №1, p.77-86.
2. Маркел Дж. Д., Грей А.Х. Линейное предсказание речи. М. "Связь" 1980, 308с.
3. Fan C., Tao C., Hongfei M. Implementation of LSP encoding in real time. Latvian Signal Proc. Int. Conf. Riga, v.1 p.286-290.
4. Kovesi B., Saoudi S., Bocher M.J., Horvath G. Real time vector quatization of LSP parameters. Speech Communication 1999 (29) p.39-47.
5. Kim H.K., Lee H.S. Interlacing Properties of Spectrum Pair Frequencies IEEE Trans. SA Processing 1999, v.7, №1, p.87-91.
6. Ланнэ А.А., Улахович Д.А. Передача информации о состоянии фильтра-предсказателя с помощью спектральных пар. Радиоэлектроника и связь. 1991, №1 р.37-43.
7. Иванов В.Н., Ланнэ А.А., Прокопенко В.Ю. Чувствительность спектральных пар. Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. 1991, т.34, №12, с.37-42.
8. ЛаннэА.А., Улахович Д.А. Разработка и применение теории линейных спектральных пар в задачах динамики дискретных систем передачи информации. Отчет по НИР. 1992. Электротехнический институт связи им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, С.-Петербург. 50с.
9. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М. "Мир", 1978, 848с.

THE NEW THEORY OF THE LINEAR SPECTRAL ROOTS

Lanne A.A.

Faculty of Digital Processing of Signals
St.-Petersburg University of Telecommunications by http: // www.dsp.sut.ru
193232 St.-Petersburg, Bolshevikov pr.24, ph. 5895185
E-mail: arturlan@robotek.ru

1. Introduction

The linear spectral roots (LSR) or spectral pairs (LSP) were offered Itakura in a 1975 [L.1] alternatively to parameters mapping a properties of the polar minimum-phase linear discrete system [L.2], i.e. system with transfer function

$$H(z) = b_0 \Big/ 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \ . \qquad (1)$$

The choice of approaching parameters, first of all, is connected to a diminution of influence of the distorting factors.

Besides it is important, that the selected parameters rather simply calculate, economically it were represented, allowed easily to inspect stability, excepting disastrous situations.

Offered LSR have appeared by best in the mentioned above sense. And though strictly this fact is not proved, in practice of competing parameters is not found yet.

The publications under the theory LSR are devoted:

- <u>to study rational (economical and fast) methods of ccalculation LSR [L.3,8]</u>*;
- <u>to study of rational methods of quantization, in particular of vectorial quantization, LSR [L. 4,8]</u>*;
- <u>to research of properties LSR [L. 5, 6, 7, 8]</u>*.

Main problem of the present article generalizing work [L. 6], is the construction of the theory ЛСК, within the framework of which the known outcomes are a special case. Besides the obtained outcomes allow to present to study new variants of spectral parameters, which use can make a competitiveness classical LSR.

Further exposition is conducted under the following plan. In section 2 the properties of special polynomials are studied which are used hereinafter. In section 3 the new methods of deriving LSR are described. In the conclusion the obtained outcomes and perspectives of their development are discussed.

2. Polynomials with monotonically decreasing PFR

Let $A_N(z)$ - minimum - phase polynomial, i.e. polynomial, which all roots lay inside a single circle of a plane Z. As a phase-frequency characteristic (PFR) of a polynomial A (z) we shall name frequency dependence $\arg A(e^{j\hat{\omega}})$. Has a place

The statement 1. *PFR of a polynomial* $z^R A_N(z)$, *where* $R \geq \frac{N}{2}$ *there is monotonically growing function of frequency; for want of modification* $\hat{\omega}$ *from 0 up to p PFR will increase from 0 up to Rp.*

The statement 2. *A real and imaginary part of a polynomial* $z^R A_N(z)$ *express by trigonometrical polynomials of a kind* $\sum_{k=0}^{N} a_k \cos(R-k)\hat{\omega}$ *and* $\sum_{k=0}^{N} a_k \sin(R-k)\hat{\omega}$, *for want of* $a_0 = 1$.

The statement 3. *A real and imaginary part of a polynomial* $z^R A_N(z)$ *depending on R can be expressed as follows*

$$Re(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{R} \tilde{a}_k \cos k\hat{\omega},\ \text{if}\quad R\text{ - integer};\qquad Re(\hat{\omega}) = \cos\frac{\hat{\omega}}{2} \sum_{k=0}^{R-\frac{1}{2}} \tilde{b}_k \cos k\hat{\omega},\ \text{if}\quad R\text{ - fractional};$$

$$Im(\hat{\omega}) = \sin\hat{\omega} \sum_{k=0}^{R-1} \tilde{c}_k \cos k\hat{\omega},\quad \text{if}\quad R\text{ - integer}; Im(\hat{\omega}) = \sin\frac{\hat{\omega}}{2} \sum_{k=0}^{R-\frac{1}{2}} \tilde{d}_k \cos k\hat{\omega},\quad \text{if}\quad R\text{ - fractional}.$$

For want of any significances of parameters

$$Re(\hat{\omega})\big|_{\hat{\omega}=\pi} = 0,\qquad \text{if}\quad R\text{ - fractional},$$

$$\mathrm{Im}(\hat{\omega})\big|_{\hat{\omega}=0,\hat{\omega}=\pi} = 0,\qquad \text{if}\quad R\text{ - integer},$$

$$\mathrm{Im}(\hat{\omega})\big|_{\hat{\omega}=0} = 0,\qquad \text{if}\quad R\text{ - fractional}.$$

Therefore, $\mathrm{Re}(\hat{\omega})$ and $\mathrm{Im}(\hat{\omega})$ have a number quite determined, not dependent from a_k roots. These roots we shall name trivial.

3. Generalization of the theory Itakura and alternate variants of construction LSR

The statement 4. *The material part of a polynomial* $z^R A_N(z)\big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$ *has zero on frequencies* $\hat{\omega}_{R_i}$, *which for want of* $\arg\{e^{j\hat{\omega}R} A_N(e^{j\hat{\omega}})\}$. *Accepts significances* $(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0,1,d = [R-\frac{1}{2}]$, *and imaginary part of the same polynomial - on frequencies* $\hat{\omega}_{I_i}$, *which for want of* $\arg\{e^{j\hat{\omega}R} A_N(e^{j\hat{\omega}})\}$ *Is equal* $2k\frac{\pi}{2},\ k = 0,1,d = [R]$, *where* $[\cdot]$ *means nearest not greater whole*.

The statement 5. *The various variants of the linear spectral roots can be obtained from a solution of the equations*

$$Re\{z^R A_N(z)\}_{z=e^{j\hat{\omega}}} = 0 \qquad Im\{z^R A_N(z)\}_{z=e^{j\hat{\omega}}} = 0,\quad \text{for } R \geq \tfrac{N}{2}.$$

For want of it for $R = \frac{N}{2}$ the order of the equations is minimum, for want of $R = \frac{N+1}{2}$ - case Itakura, for want of $R > \frac{N+1}{2}$ - redundant number of parameters is received, for want of $R = N$ - it is possible to be limited to a solution of one equation.

4. Conclusion

The outcomes, obtained in work, allow to make a number of the important conclusions and offers.

- The idea of spectral frequencies (roots) offered in [L.1], actually can be realized differently in the sense that there are diverse variants LSR.
- The offered theory LSR enables "to generate" variants LSR, changing a parameter R. So, for want of $R = \frac{N+1}{2}$ has a place a case investigated Itakura and everywhere used in researches and development. The variety of variants LSR, allows to put a problem of optimization, in particular, on a criterion of sensitivity.
- The base equations install close connection of the theory LSR and FFR-filters with linear PFR.
- At last, the study of concrete situations, for example, important in problems compression of speech, of a problem of economical transfer of parameters of a linear prediction, makes an actual problem of a detailed research of rational methods of calculation and quantization LSR for want of N = 10. Really, for want of N = 10 and $R = \frac{N}{2} = 5$ instead of two equations of the 5-th degree for want of method Itakura, it is necessary to solve one equation by 5-th and one equation of the 4-th degree. The latter can be solved analytikally.

Open there is a problem on choice of parameters of quantization. The new theory allows as those to select various combinations LSR and coefficient of a linear prediction.

Bibliography

1. Itakura F. Line spectrum representation of linear prediction coefficients of speech signals. J. Ac. Soc. Am. 1975, V.57 N. 1, p.77-86.

2. Маркел Дж.Д., Heat A.X. A linear prediction of speech. M. "Communication"("connection") 1980, 308p..

3. Fan C., Tao C., Hongfei M. Implementation of LSP encoding in real time. Latvian Signal Proc. Int. Conf. Riga, V.1 p.286-290.

4. Kovesi B., Saoudi S., Bocher M.J., Horvath G. Real time vector quatization of LSP parameters. Speech Communication 1999 (29) p.39-47.

5. Kim H.K., Lee H.S. Interlacing Properties of Spectrum Pair Frequencies IEEE Trans. SA Processing 1999, V.7, N1, p.87-91.

6. Lanne A.A., Transfer of a state information of a filter - prediction with the help of of spectral pairs. A Radioelectronics Engineering and Communication. 1991, N. 1, p.37-43.

7. Ivanov V.N., Lanne A.A., Prokopenko B.Y.Ю. Sensitivity of spectral pairs. Radioelectronics& Communications Sistems.. 1991, V.34, N 12, p.37-42.

8. Lanne A.A, Ulahovich D.A. Development and application of the theory of linear spectral pairs in problems of dynamics discrete systems of transfer of an information. The report. 1992. Electrotechnical institute of communication, St.-Petersburg. 50p..

9. Rabiner L, Gold B. Theory and application of digital processing of signals. "World", 1978, 848p.