

Расчёт узкополосных низкочастотных фильтров с конечной импульсной характеристикой

В этой докладе рассмотрены цифровые фильтры, называемые интерполированными фильтрами с конечной импульсной характеристикой (ИКИХ фильтры), использование которых позволяет создавать узкополосные фильтры низких частот (ФНЧ) с существенно уменьшенной вычислительной нагрузкой, и, соответственно, более простые по сравнению с традиционными фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ фильтры).

In this report the digital filters named interpolated filters with the final pulse characteristic (IFIR filters) which use allows to create narrow-band filters of low frequencies about essentially reduced computing loading, and, accordingly, more simple are considered in comparison with traditional filters with the final pulse characteristic (FIR filters).

Фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ фильтры) являются важным классом цифровых фильтров. Традиционные КИХ фильтры N порядка появились в цифровой обработке сигналов (ЦОС) в начале 1970-ых и с тех пор нашли своё применение во многих приложениях [1]. Способность КИХ фильтров предоставлять гарантированную устойчивость и строго линейную фазо-частотную характеристику (ФЧХ), наряду с доступным аппаратным обеспечением, сделали данный тип фильтров темой большего количества статей.

В докладе рассмотрены ИКИХ фильтры; показано, как может быть уменьшена вычислительная нагрузка узкополосного фильтра с линейной ФЧХ, приведён пример расчёта ИКИХ фильтра, выбор параметров, представлены графики, иллюстрирующие работу фильтра.

В основу метода положены материалы [1,2], в которых использовано преобразование требуемого узкополосного ФНЧ к фильтру-прототипу с последующей заменой каждого элемента задержки (обозначение « Z ») на M элементов задержки (обозначение « Z^M »). В результате, получен многополосный фильтр, в котором нижняя полоса пропускания (ПП) соответствовала требуемой полосе пропускания узкополосного ФНЧ фильтра, а лишние ПП исключались с помощью маскирующего фильтра. Таким образом, была получена схема из двух каскадно включённых фильтров, общее количество элементов которых существенно меньше, чем у фильтра, рассчитанного по исходным требованиям классическими методами, включая и методы оптимального синтеза.

Принципы построения интерполированных фильтров с конечной импульсной характеристикой

На рис. 1 приведена схема формирующего фильтра. Таким образом, импульсная характеристика (ИХ) полученного фильтра – в M раз растянутая ИХ фильтра-прототипа, а амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – в M раз сжатая АЧХ фильтра-прототипа.

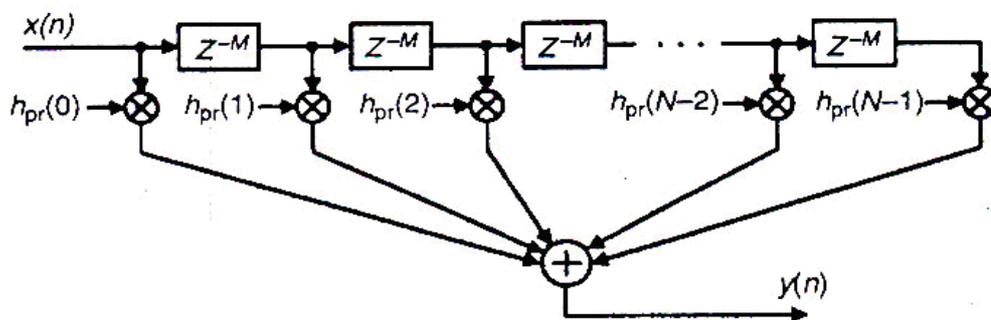


Рис. 1

Фильтр-прототип представлен в Z -области своей передаточной функцией (ПФ):

$$H_{\text{пр}}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{пр}}(k) \cdot z^{-k}, \quad (1)$$

где N – длина импульсной характеристики. При замене в (1) z на z^{-M} , была получена ПФ формирующего фильтра:

$$H_{\text{мн}}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{пр}}(k) \cdot z^{-kM}. \quad (2)$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра-прототипа представлена на рис. 2,а, рис 2,б – АЧХ формирующего фильтра. Повторяющиеся полосы пропускания в $|H_{\text{мн}}(f)|$ принято называть репликами основной АЧХ, или просто репликами.

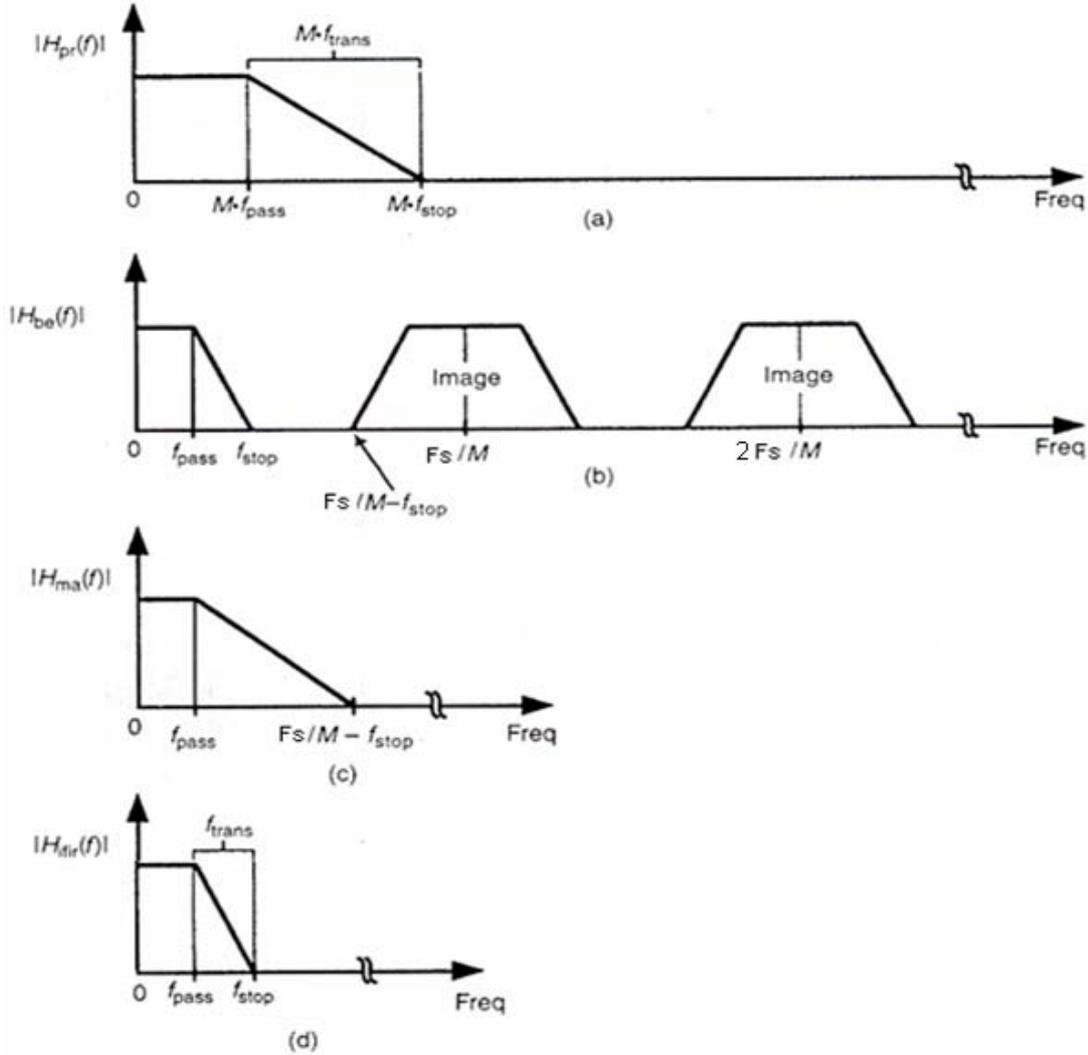


Рис. 2

Для устранения реплик после формирующего фильтра установлен фильтр, названный маскирующим (рис. 2, c) который является фильтром НЧ и выделяет только требуемую полосу пропускания (рис. 2, d).

Результирующая АЧХ выражается как

$$|H_{рез}(f)| = |H_{мн}(f)| \cdot |H_{маск}(f)| \quad (3)$$

В итоге, ИКИХ фильтр представлен в виде каскадного фильтра, структурная схема которого показана на рис. 3.

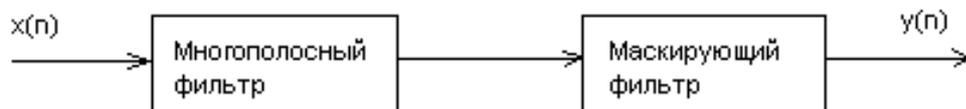


Рис. 3

Для вычисления коэффициентов формирующего и маскирующего фильтров, необходимо было определить их параметры.

**Определение параметров фильтра-прототипа и маскирующего фильтра.
Определение коэффициента М**

Пусть f_{pass} - правая граница полосы пропускания, f_{stop} -левая граница полосы задерживания и $f_{\text{trans}} = f_{\text{pass}} - f_{\text{stop}}$, тогда базовые частоты фильтра-прототипа определяются как:

$$f_{\text{пр-pass}} = M \cdot f_{\text{pass}} \quad (4a)$$

$$f_{\text{пр-stop}} = M \cdot f_{\text{stop}} \quad (4б)$$

$$f_{\text{пр-trans}} = M \cdot f_{\text{trans}} = M \cdot (f_{\text{stop}} - f_{\text{pass}}) \quad (4в)$$

Частоты маскирующего фильтра при этом будут

$$f_{\text{ма-pass}} = f_{\text{pass}} \quad (5a)$$

$$f_{\text{ма-stop}} = \frac{F_s}{M} - f_{\text{stop}} \quad (5б)$$

Выбор оптимального коэффициента M

Максимальное значение коэффициента M можно получить, опираясь на рисунок 2,в. Частота $F_s/M - f_{\text{stop}}$ не должна быть меньше, чем f_{stop} . Из этого условия определено максимального значения M :

$$M_{\text{max}} = \frac{f_d}{2 \cdot f_{\text{stop}}} \quad (6)$$

Таким образом, приемлемый коэффициент расширения – это целое число в диапазоне $2 \leq M \leq M_{\text{max}}$.

При практическом использовании возникает задача выбора M из числа допустимых значений.

Экспериментально показано, что кривые, представляющие зависимость порядков фильтров от коэффициента M , имеют один минимум. Следовательно, оптимальное значение M можно искать, используя одномерный поиск унимодальной функции.

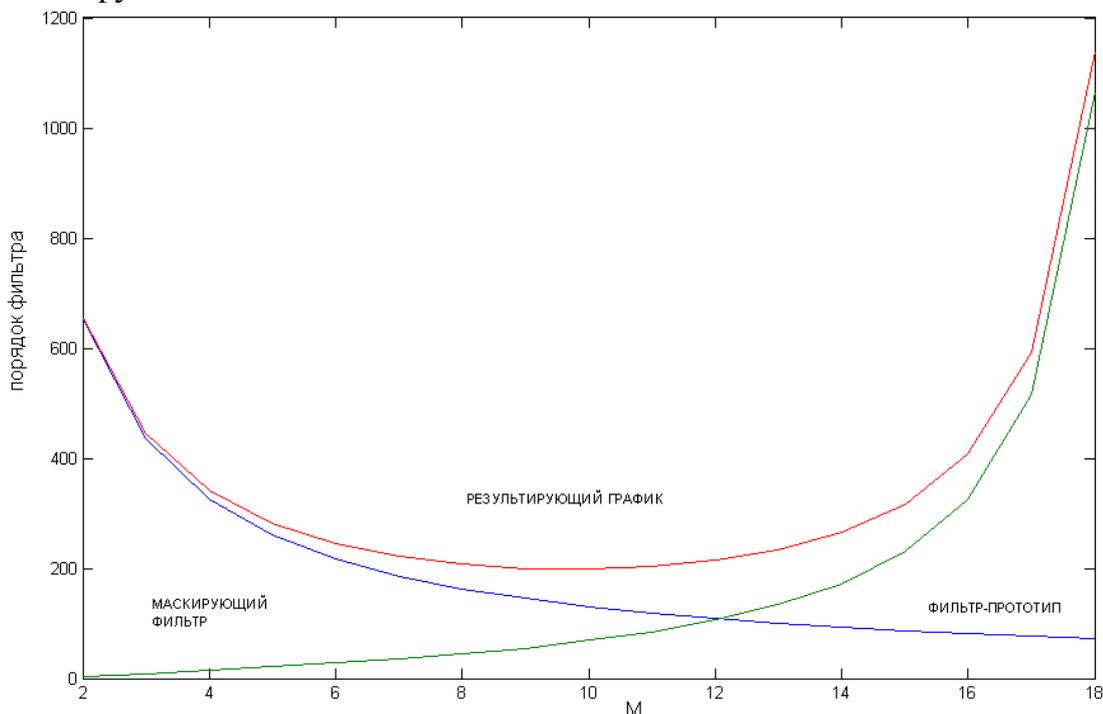


Рис. 4

Максимальное значение допуска в полосе пропускания – это результат реакций интерполированного и маскирующего фильтров:

$$1 + \delta_{рез} = (1 + \delta_{мн}) \cdot (1 + \delta_{ма}) = 1 + \delta_{мн} + \delta_{ма} + \delta_{мн} \cdot \delta_{ма}. \quad (7)$$

При малых значениях $\delta_{инт}$ и $\delta_{ма}$, слагаемым $\delta_{инт} \cdot \delta_{ма}$ можно пренебречь, и мы получаем

$$\delta_{ИКИХ} = \delta_{инт} + \delta_{ма} \quad (8)$$

Таким образом, при синтезе формирующего и маскирующего фильтров, предусмотрительно будет сделать одинаковые допуски, равные половине конечного значения

$$\delta_{мн} = \delta_{ма} \approx \delta_{рез} / 2. \quad (9)$$

Ослабление в полосе задерживания для обоих каскадно соединённых фильтров должно быть равно требуемому ослаблению, так как происходит наложение их полос пропускания и задерживания в области, которая для синтезируемого фильтра является строго полосой задерживания

Использование фильтров с симметричными характеристиками (ФСХ) для синтеза ИКИХ фильтров

Дальнейшее уменьшение порядка результирующего фильтра возможно, если маскирующий фильтр представить в виде каскадного соединения двух фильтров с симметричными АЧХ: низкочастотного и режекторного (рис. 5). Теория этих фильтров основана на лемме С. Н. Бернштейна [3] и изложена в [4].

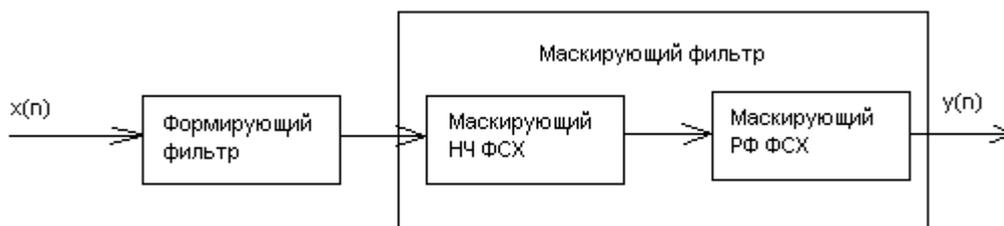


Рис. 5

Амплитудно-частотные характеристики представлены на рис. 6 (рис. 6, а – АЧХ результирующего маскирующего фильтра, рис. 6, б – маскирующего НЧ ФСХ, рис. 6, с – маскирующего РФ ФСХ).

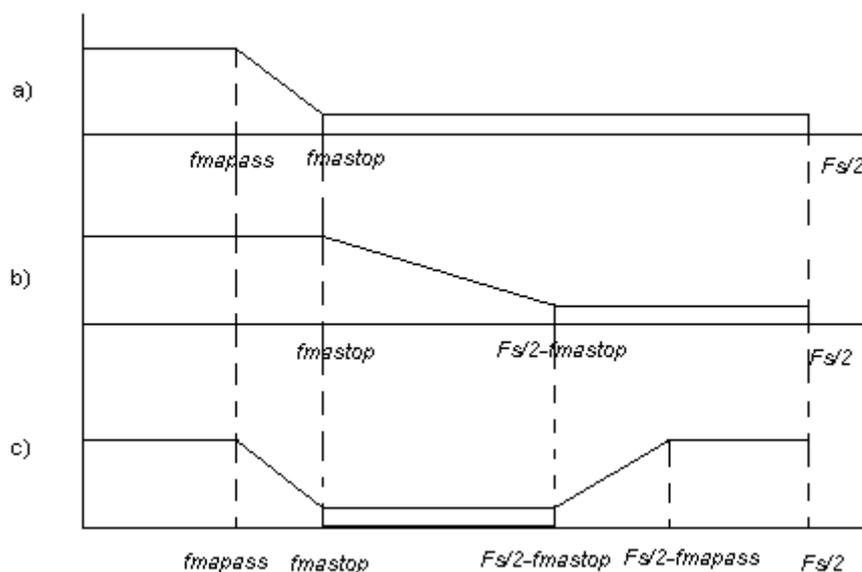


Рис. 6

Преимущества использования ФСХ удобно проследить на примере.

Пример расчёта фильтра

Требования к фильтру.

Частота дискретизации 2000 Гц.

Полоса пропускания фильтра [0 – 15] Гц,

полоса задерживания [25 – 1000] Гц.

Неравномерность в ПП и ПЗ 0,0001 раз.

Расчёт фильтров производится с помощью программы MATLAB 7.1; описания алгоритмов работы с данной программой приведены в [5] и [6].

Традиционный фильтр с такими характеристиками имеет длину 941.

Рассмотрим реализации ИКИХ фильтра и ИКИХ фильтра с ФСХ.

Синтез интерполированного фильтра с конечной импульсной характеристикой

При заданных требованиях максимальное значение коэффициента M равняется 40 (по формуле 6).

M		9	10	11	12	13
форм. фильтр	fp, Гц	135	150	165	180	195
	fs, Гц	225	250	275	300	325
	элементы	110	99	90	83	77
маск. фильтр	fp, Гц	15				
	fs, Гц	197,2	175	156,8	141,7	128,8
	длина	57	61	69	77	85

общее количество элементов	167	160	159	160	162
----------------------------	-----	-----	-----	-----	-----

Оптимальное значение М равно 11.

Получается, что при использовании ИКИХ фильтра выигрыш в количестве умножителей составляет 592,0%, а проигрыш по длине – 12,5% по сравнению с традиционным.

Синтез интерполированного фильтра с использованием фильтров с симметричными характеристиками

М		11	12	13	14	15
форм. фильтр	fp, Гц	165	180	195	210	225
	fs, Гц	275	300	325	350	375
	элементы	90	83	78	71	67
маск. РФ		71/37	79/41	87/45	95/49	106/55
маск. НЧ		14	11	11	11	10
общее количество элементов	число	141	135	134	131	132

Оптимальным является значение М равное 14.

Получается, что при использовании ИКИХ фильтра с ФСХ выигрыш в количестве умножителей составляет 718%, а проигрыш по длине – 16,8% по сравнению с традиционным.

Результирующие АЧХ фильтров одинаковы. Но при сравнении данных методов видно, что фильтр, где используются ФСХ, проигрывает обычному ИКИХ фильтру 11,8% от длины, и выигрывает 126,3% по общему количеству умножителей.

Сравнение примеров для разной ширины полосы расфилтровки (при изменяющейся частоте ПЗ)

f0, Гц	0	0	0	0	0	0
fp, Гц	15	15	15	15	15	15
fs, Гц	20	25	30	35	40	45
Fs/2, Гц	1000	1000	1000	1000	1000	1000
традиционный фильтр						
длина	1868	941	630	462	377	311
двухкаскадный фильтр						
количество элементов	231	159	129	113	103	86
длина	2064	1059	723	561	463	384
М оптим.	14	11	10	9	9	9
трёхкаскадный фильтр						
количество элементов	188	131	109	96	89	82

длина	2102	1170	754	598	449	383	
М оптим.	17	14	12	12	10	8	
процентное соотношение							
по элем.	2ух	808,6%	592,0%	488,4%	408,8%	366,0%	361,6%
	3ёх	993,6%	718,3%	578%	481,3%	423,6%	379,3%
по длине	2ух	10,5%	12,5%	14,8%	21,4%	22,8%	23,5%
	3ёх	12,5%	16,8%	19,7%	29,4%	30,5%	23,2%

На рис. 7 представлена зависимость М оптим. от ширины полосы расфилтровки. На рис. 8 – зависимости длин фильтров от ширины полосы расфилтровки. На рис. 9 – зависимости количества умножителей от ширины полосы расфилтровки.

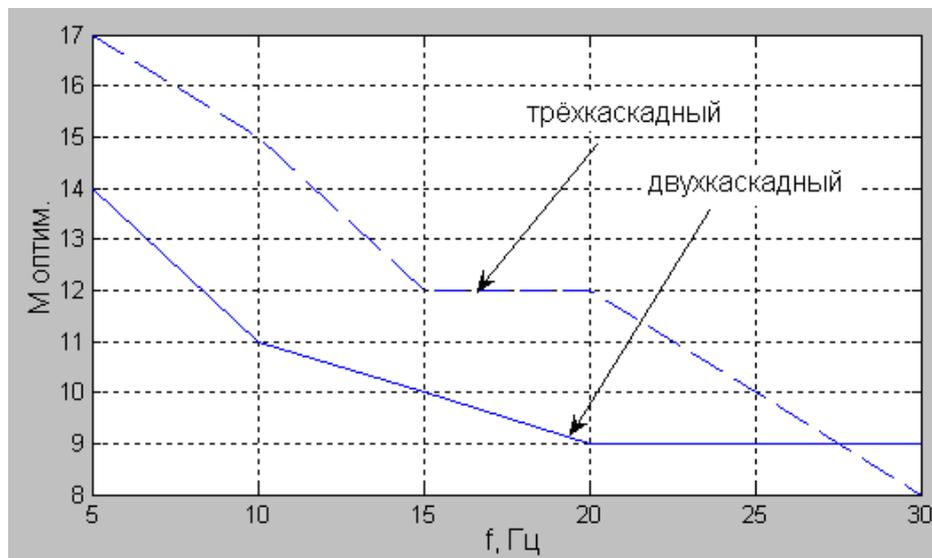


Рис. 7

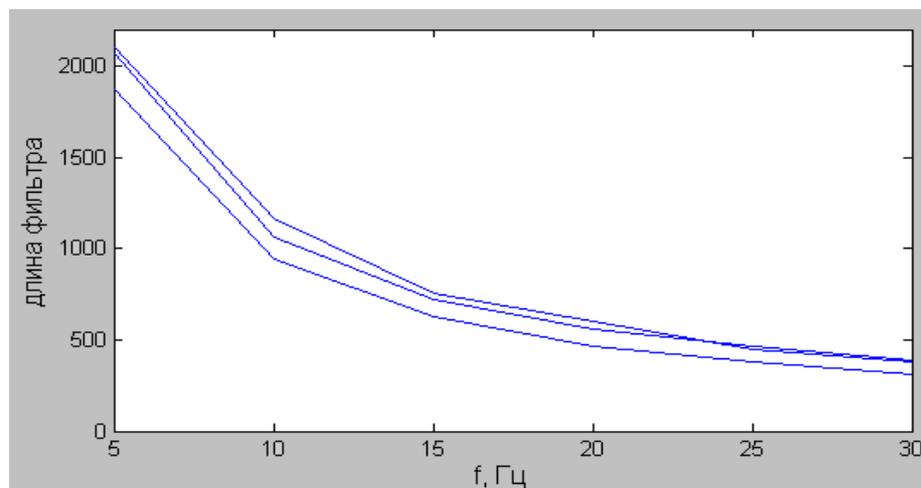


Рис. 8

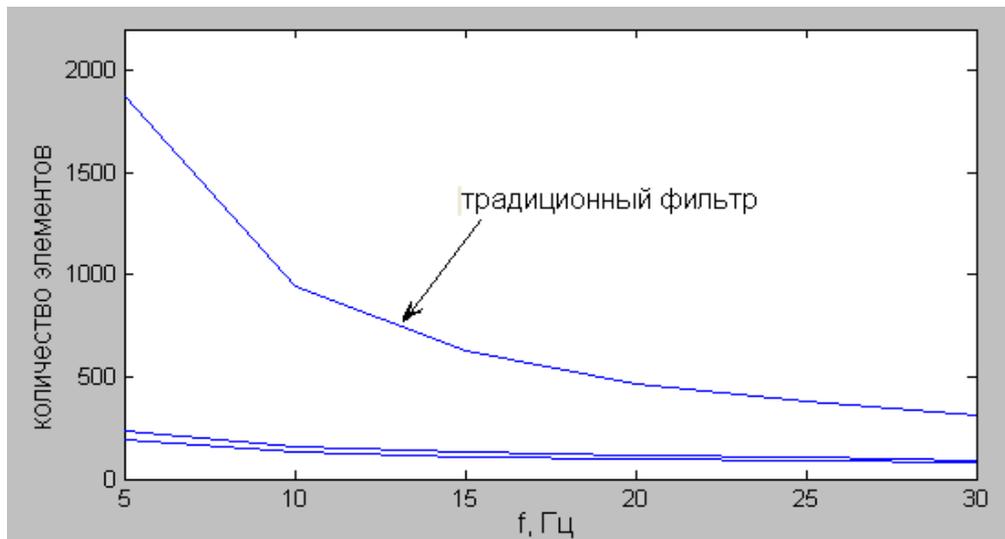


Рис. 9

Из графиков видно, что при любой ширине полосы расфилтровки, выгоднее всего, по количеству умножителей, использовать ИКИХ фильтр с ФСХ

Литература

1. Ричард Лайонс «Цифровая обработка сигналов», М., Бином, 2006
2. Richard Lyons, Interpolated narrowband lowpass FIR filters, IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE, January 2003
3. Бернштейн С. Н. «Экстремальные свойства полиномов», ОНТИ НКПГ, 1937
4. Ланнэ А. А. «Синтез нерекурсивных цифровых фильтров с симметричными характеристиками», Известия ВУЗов Радиоэлектроника, том 38, № 3-4, 1995
5. Игорь Ануфриев, Александр Смирнов, Елена Смирнова «MATLAB 7», СПб, «БХВ-Петербург», 2005
6. Дьяконов В. П. «MATLAB 6.5 SP1/7.0 Simulink 5/6 Обработка сигналов и проектирование фильтров», М, Солон-Пресс, 2005