



**В. Гептнер, А. Ланц, Д. Черненко**  
 МАТЛАБ для DSP. Использование GUI WAVEMENU для решения инженерных задач. Часть 1

**Введение**

Продолжая цикл статей "Matlab для DSP", начатый в "CHIP News" №2, 2000 г., эта статья посвящена использованию графического интерфейса пользователя (GUI) Wavelet Menu, при помощи которого можно получить удобный и удобный доступ к основным процедурам toolbox Wavelet — наборе инструментов (кратко — плагин), встроенных в вычислительную среду MATLAB, для решения разнообразных инженерных задач, связанных с комплексным сигнальным анализом их особенностей, очисткой от шумов и др. В основе используемых процедур лежит относительно новая теория разложения сигналов по специальным функциям — вейлетам (wavelet), главные особенности которых — частотное разрешение в 50 раз больше, а саморазрешение и компактная локализация энергии по времени и частоте. Предполагается, что читатель знаком с основными эти теории [1,2,3].

Тулбокс Wavelet состоит из набора подпрограмм, которые позволяют:

- анализировать и исследовать характеристики индивидуальных вейлет и wavelet-пакетов;
- выполнять непрерывное wavelet-преобразование одномерных сигналов;
- производить анализ и синтез дискретных одномерных и двумерных сигналов на основе непрерывного wavelet-преобразования;
- раскладывать одно- и двумерные сигналы по пакету вейлет;
- исследовать статистические характеристики сигналов;
- производить скатинг и ринкстку от шума одномерных и двумерных сигналов.

Использовать подпрограммы тулбокса Wavelet можно в режиме командной строки непосредственно из системы MATLAB. Это обычная практика для всех приложенных пакетов MATLAB. Применительно к описываемому случаю представляется возможность решать широкий круг задач с помощью графического интерфейса — Wavelet Menu, который значительно облегчает применение основных подпрограмм тулбокса, а так же обеспечивает представление и визуализацию данных и результатов в удобной и наглядной форме.

**Описание Wavemenu**

**Вывод Wavemenu**

Wavelet Menu запускается из командной строки MATLAB командой "wavemenu".

При вызове этой функции появляется главное меню GUI Wavelet Menu (рис. 1).

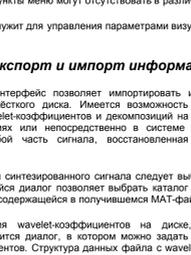


Рис. 1. Главное меню GUI Wavemenu

**Структура Wavemenu**

Wavemenu состоит из семи независимых разделов:

- Wavelet 1-D — предоставляет возможность анализа и синтеза одномерного сигнала с использованием дискретного wavelet-преобразования, скатинга сигнала и чистку его от шума;
- Wavelet 2-D — тоже для двумерных сигналов (например, изображения), деление спектра на полосы и локализация шумов;
- Wavelet Display — дает возможность посмотреть графики материнского wavelet и масштабированных функций, соответствующих разным масштабам КИХ-фильтров, а также получить краткую справку для каждого из используемых wavelet-семейств;
- Wavelet Packet 1-D — предоставляет возможность анализа и синтеза одномерного сигнала с использованием разложения по wavelet-пакету, скатинга сигнала и чистку его от шума;
- Wavelet Packet 2-D — то же для двумерных сигналов;
- Wavelet Packet Display — дает возможность посмотреть графики материнского wavelet и масштабированных функций wavelet-пакета, а также получить краткую справку по каждому из используемых wavelet-семейств;
- Continuous Wavelet 1-D предоставляет возможность анализа одномерного сигнала с использованием непрерывного wavelet-преобразования.

**Меню для разделов Wavemenu**

File Menu — ниже описаны команды, поддерживающие работу GUI:

- Load Signal — загрузит сигнал, находящийся в MAT-файле [1], для его дальнейшего анализа в текущем разделе;
- Load Coefficients — загрузит коэффициенты wavelet-преобразования сигнала для дальнейшего анализа;
- Load Decompositions — загрузит декомпозицию сигнала;
- Save Synthesized Signal — сохранить в MAT-файле синтезированный сигнал;
- Save Coefficients — сохранить в MAT-файле коэффициенты wavelet-преобразования;
- Save Decompositions — сохранить декомпозицию сигнала;
- Demo Analyze — выбрать пример анализа декомпозиции структурных сигналов;
- Print Settings — изменить текущие установки печати;
- Print — распечатать карту экрана, используя текущие установки печати;
- Close — выход из раздела Wavemenu и возврат к главному меню.

1 - некоторые пункты меню могут отсутствовать в различных разделах.

Options Menu служит для управления параметрами визуализации исходных данных и результатов анализа.

**Экспорт и импорт информации из Wavemenu**

Графический интерфейс позволяет импортировать информацию на диск и экспортировать информацию с жесткого диска. Имеется возможность сохранения синтезированных сигналов, вычисленных вейлет-коэффициентов и декомпозиции на диске для дальнейшего использования в других приложениях или непосредственно в системе MATLAB. Напомним, что декомпозиция представляет собой часть сигнала, восстановленного по результатам wavelet-разложения на некотором уровне.

Для сохранения синтезированного сигнала следует выбрать пункт меню "File->Save Synthesized Signal". Появившийся диалог позволяет выбрать каталог и имя файла для сохранения сигнала. Имя переменной, содержащейся в получившемся MAT-файле, будет совпадать с именем файла.

Для сохранения wavelet-коэффициентов на диск, выбирается пункт меню "File->Save Coefficients". Появится диалог, в котором можно задать каталог и имя файла для сохранения wavelet-коэффициентов. Структура данных файла с wavelet-коэффициентами представлена в табл. 1 и на рис. 2. Для сохранения декомпозиции исходного сигнала используется пункт меню "File->Save Decompositions". Структура данных файла с резуль-татами декомпозиции приведена в табл. 2.

Таблица 1

Непрерывное Wavelet-преобразование (Continuous Wavelet 1-D)		
Имя переменной	Размер*	Описание
coefs	K x N	Переменная "coefs" содержит коэффициенты непрерывного wavelet-преобразования
scales	1 x K	Переменная "scales" содержит значения масштабов

Дискретное Wavelet-преобразование (Wavelet 1-D)		
Имя переменной	Размер	Описание
Coefs	1 x M	Переменная "coefs" содержит коэффициенты дискретного wavelet-преобразования
Longs	1 x J	longs - вектор, содержащий длины каждого из подвекторов

\* K - число масштабов, по которым анализировался сигнал; N - длина исходного сигнала; J - количество уровней разложения для дискретного wavelet-преобразования; M - количество полученных wavelet-коэффициентов; K - количество уровней разложения исходного сигнала; M - количество полученных wavelet-коэффициентов.



Рис. 2. Структура данных, содержащих коэффициенты wavelet-преобразования

Таблица 2

Дискретное Wavelet-преобразование (Wavelet 1-D)		
Имя переменной	Размер*	Описание
coefs	1 x M	Переменная "coefs" содержит коэффициенты дискретного wavelet-преобразования
data_name		Строка, содержащая имя декомпозиции
longs	1 x J	longs - вектор, содержащий длины каждого из подвекторов
wave_name		Строка, содержащая мнемоническое имя wavelet, использованного для декомпозиции

Разложение по wavelet-пакету (Wavelet Packet 1-D)		
Имя переменной	Размер	Описание
data_name		Строка, содержащая имя декомпозиции
data_struct		Вектор, содержащий термины wavelet-коэффициентов
free_struct	2 x P	Матрица, содержащая структуру дерева wavelet-пакета

\* J - количество уровней разложения для дискретного wavelet-преобразования; M - количество полученных wavelet-коэффициентов дискретного wavelet-преобразования; P - количество уровней узлов в дереве wavelet пакета (для полного дерева равно 2<sup>J</sup>+1).

В качестве тестируемых данных могут использоваться:

- тестовые сигналы, содержащиеся в каталоге MATLAB\toolbox\wavelet\wavetest;
- сигналы, введенные в меню программы, но обязательно в формате MAT-файла;
- сохраняемые файлы в виде файла или с помощью звуковой карты и также с помощью звуковой карты в формате MAT-файла.

Для представления произвольного сигнала в формате MAT-файла необходимо:

- загрузить сигнал в систему MATLAB (это можно сделать при помощи команд load или fscanf с соответствующим параметром [5]);
- сохранить сигнал в MAT-файле (при помощи команды save), который имеет то же имя, что и переменная, содержащая сигнал (не более 8 символов).

Для загрузки wavelet-коэффициентов или декомпозиции сигнала необходимо придерживаться определенной структуры данных (табл. 1, 2 и рис. 2). Для загрузки данных в графический интерфейс используются пункты меню "File->Load Signal", "File->Load Coefficients" или "File->Load Decompositions", соответственно.

**Использование Wavemenu для обработки сигналов**

Едва ли не важнейшей при анализе и синтезе сигнала является идея разложения сигнала в виде суммы независимых базисных функций. Если эти функции обладают специальными свойствами, они называются базисными. Наиболее важным свойством базисных функций является базис единичных импульсов во временной области и базис, состоящий из экспонент, — в частотной. К сожалению, они не могут быть успешно использованы для представления нестационарных сигналов. Wavelet-преобразование позволяет разложить сигнал по компактным, хорошо локализованным во времени и частоте, базисным функциям (табл. 3), что позволяет, в отличие от преобразования Фурье, определять нестационарные сигналы. При этом важно, что такое разложение достаточно точно в вычислительном отношении.

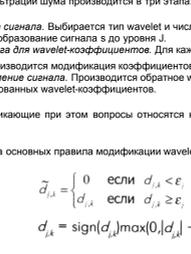


Рис. 3. Разбиение частотно-временного плана при STFT (а) и при CWT (б). При STFT окно анализа строго локализовано по времени и частоте, а при CWT локализация изменяется в зависимости от масштаба

Анализ с помощью непрерывного wavelet-преобразования выполняется примерно так же, как и анализ с помощью кратковременного преобразования Фурье в том смысле, что сигнал укладывается на некоторую функцию (вейлет), подобную окну в STFT. При этом ширина окна меняется по мере того, как выполняется преобразование для каждой из компонент спектра.

Математическое определение непрерывного wavelet-преобразования [1-4]:

$$x(t) \rightarrow X(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_a(t-\tau) x(\tau) d\tau$$

где  $x$  — сигнал, и  $\psi_a$  — анализирующая функция. Для wavelet-преобразования анализирующая функция  $\psi_{ab}$  является из одной вейлет (или порождающей) функции  $\psi$  (mother wavelet).

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

где  $a$  — параметр масштаба, который определяется как 1/частота,  $b$  — сдвиг по времени.

Функция  $\psi$  должна быть хорошо локализованной во временной и частотной областях и, кроме того, удовлетворять условию дугности, гарантирующей существование обратного wavelet-преобразования.

Дискретное wavelet-преобразование наиболее эффективно в задачах скатинга сигналов и извлечения, задачи очистки сигнала от шумов. Непрерывное wavelet-преобразование в основном используется для анализа переносных процессов, обнаружения резких изменений в исходном сигнале, быстрого анализа и декомпозиции на диске для дальнейшего использования. Если исходная функция нечетная, то ее также можно непрерывно wavelet-преобразование стало применяться в задаче распознавания образов; кривая в частотно-временной области трактуется как контур предмета.

**Получение информации по конкретным wavelet**

Основной при работе с wavelet-преобразованием является получение информации по конкретному wavelet. Не существует каких-то жестких правил, но лучше всего выбрать wavelet таким образом, чтобы он принадлежал такому же классу функций, что и анализируемый сигнал. Если исходную функцию можно аппроксимировать полиномом, то количество нулевых моментов wavelet должно примерно равняться степени полинома.

Числом нулевых моментов wavelet называется максимальное целое число  $P$ , при котором выполняется следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots, P$$

Другой важной проблемой является определение числа уровней разложения при дискретном wavelet-преобразовании (DWT) имеют переменное разрешение по времени и частоте. В области высоких частот оно равно  $2^j$ , а в области низких частот оно равно  $1/2^j$ , где  $j$  — номер уровня, а  $k$  — номер времени. Сигналы  $d_{j,k}$  и  $c_{j,k}$  вычисляются по формулам:

$$d_{j,k} = 2^{j/2} \sum_n c_{j-1,n} f_{n+2k}$$

$$c_{j,k} = 2^{j/2} \sum_n c_{j-1,n} g_{n+2k}$$

где  $f(n)$  и  $g(n)$  — импульсные характеристики фильтров.

Сложность вычисления дискретного wavelet-преобразования с помощью схемы wavelet-преобразования линейна. Это означает, что число операций, необходимое для вычисления wavelet-преобразования, линейно зависит от длины сигнала.

Так как КИХ-фильтры не являются идеальными, то происходит наложение спектров: в исходном сигнале часть добавляется высокочастотные составляющие и наоборот. Однако фильтры построены таким образом, чтобы при последующем восстановлении этот эффект был компенсирован, и не происходило потери информации.



Рис. 6. Схема обратного преобразования

При обратном преобразовании (рис. 6) низкочастотная  $c_{j,k}$  и высокочастотная  $d_{j,k}$  составляющие делаются нулями и пропускаются через КИХ-фильтры с передаточными функциями  $G_1(z)$  и  $H_1(z)$ , обозначенные определяемые через  $G_2(z)$  и  $H_2(z)$ . В результате получается низкочастотная составляющая  $c_{j-1,k}$  и так далее [1]. Процедура заканчивается полным восстановлением исходного сигнала  $s$ .

$$c_{j-1,k} = 2^{j/2} \sum_n c_{j,k} g_{n+2k} + 2^{j/2} \sum_n d_{j,k} h_{n+2k}$$

Для того, чтобы не происходило потери информации, коэффициенты  $f(n)$  и  $g(n)$  фильтров  $H_2(z)$  и  $G_2(z)$ , соответственно, должны обладать следующими свойствами:

$$2 \sum_n (h_{n+2k} h_{n+2k} + g_{n+2k} g_{n+2k}) = \delta_{k,0}$$

$$2 \sum_n h_{n+2k} h_{n+2p} = 2 \sum_n g_{n+2k} g_{n+2p} = \delta_{k,p}$$

$$2 \sum_n h_{n+2k} h_{n+2p} = 0$$

Изложенное выше иллюстрируется примером wavelet-преобразования сигнала, содержащимся в тестовом файле poschr.mat.

Этот сигнал имеет следующий вид:

$$s(k) = 4 \sin\left(\frac{\pi k^3}{3N}\right) + e(k)$$

где  $N$  — продолжительность сигнала, в нашем случае, 1024 отсчета;  $k = 1..N$ ;  $e(k)$  — "белый" шум.

Для использования вышеупомянутого сигнала нужно выбрать пункт "Wavelet 1-D" в главном меню. Появится панель инструментов дискретного wavelet-анализа для одномерного сигнала (рис. 7). Для загрузки сигнала выбирается пункт меню "File->Load Signal". Одновременно появится диалог загрузки сигнала, следует выбрать пример анализируемого сигнала (MAT-файл poschr.mat, который должен находиться в каталоге MATLAB\toolbox\wavelet\wavetest).



Рис. 7. Панель инструментов одномерного дискретного wavelet-преобразования. В окне wavelet-коэффициентов светлостью соответствуют коэффициенты с большим уровнем, а темнотой - с меньшим

После ввода сигнала производится его разложение с использованием wavelet Добиши с 3мя нулевыми моментами (db3) до 5-го уровня. Максимальное число уровней ограничено длиной сигнала (в нашем случае, 1024 отсчета). Результат разложения отображается двумерной картой. По оси ординат отложено время, а по оси абсцисс — уровню разложения (рис. 7). Более наглядно результат разложения можно оценить по декомпозиции сигнала  $\{s_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ . Каждый элемент декомпозиции определяет вклад соответствующего уровня разложения (полосы частот) в исходный сигнал.

**Очистка сигнала от шумов**

Графический интерфейс позволяет решать задачи уменьшения уровня шума в дискретном (цифровом) сигнале (очистка от шума). Для этого необходимо нажать на кнопку "Denoise" в середине правой колонки под кнопкой "Analyze". Появится окно (рис. 8), в котором можно производить удаление шума из сигнала, используя дискретное wavelet-преобразование.



Рис. 8. Панель инструментов для очистки сигнала от шума при использовании одномерного дискретного wavelet-преобразования

Базовая модель сигнала с шумами имеет следующую форму:

$$s(k) = f(k) + \sigma e(k)$$

В самой простой модели предполагается, что  $e(k)$  — "белый" шум, где дисперсия  $\sigma^2$  полагается равной 1.

Цель — подавление шумовой части сигнала  $s$  и восстановление функции  $f$ .

Процедура фильтрации шума производится в три этапа:

1. **Разложение сигнала.** Выбирается тип вейлета и число уровней разложения  $J$ . Вычисляются wavelet-преобразования сигнала  $s$  до уровня  $J$ .
2. **Выбор порога для wavelet-коэффициентов.** Для каждого уровня от 1 до  $J$  выбирается  $\epsilon_j$  — порог, и производится модификация коэффициентов по определенному правилу (см. ниже).
3. **Восстановление исходного сигнала.** Обратное wavelet-преобразование с использованием модифицированных wavelet-коэффициентов.

Основные возникающие при этом вопросы относятся к выбору порога и правилу модификации коэффициентов.

Существуют два основных правила модификации wavelet-коэффициентов: "hard" и "soft" (рис. 9).

$$\tilde{d}_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{если } d_{j,k} < \epsilon_j \\ d_{j,k} & \text{если } d_{j,k} \geq \epsilon_j \end{cases} = \text{"hard"}$$

$$d_{j,k} = \text{sign}(d_{j,k}) \max(0, |d_{j,k}| - \epsilon_j) = \text{"soft"}$$

В GUI при очистке сигнала от шума необходимо задать следующие параметры: правило модификации wavelet-коэффициентов, правило выбора порога и модель шума.



Рис. 9. Исходный сигнал (а); сигнал, модифицированный по правилу "hard" (б); сигнал, модифицированный по правилу "soft" (в)

Правила модификации wavelet-коэффициентов:

- **Automatic soft thresholding** — автоматический выбор порога, модификация коэффициентов по правилу "soft";
- **Automatic hard thresholding** — автоматический выбор порога, модификация коэффициентов по правилу "hard";
- **Manual soft thresholding** — ручной выбор порога, модификация коэффициентов по правилу "soft";
- **Manual hard thresholding** — ручной выбор порога, модификация коэффициентов по правилу "hard".

Правила выбора порога при автоматическом методе удаления шума:

- **Fixed from threshold** — фиксированный порог, равный  $\sqrt{2 \log(\text{length}(s))}$ ;
- **Rigorous SURE** — выбор, использующий квадратичную функцию потерь;
- **Naive SURE** — выбор, использующий квадратичную функцию потерь с помощью "Обновить модифицированных wavelet-коэффициентов";
- **Minimax** — выбор, использующий принцип минимакса (оцененный от шума сигнал аппроксимируется регрессионной моделью и выбирается порог, который реализует минимальную среднеквадратичную ошибку, полученную для самой плохой функции в данном множестве).

Используемая модель шума:

- **Unscaled white noise** — "белый" шум;
- **Scaled white noise** — гауссовский шум, дисперсия шума  $\sigma^2$  оценивается по самой высокой частотной составляющей сигнала —  $d_{1,k}$ ;
- **Non-white noise** — произвольный шум, дисперсия шума  $\sigma^2$  вычисляется для каждого уровня разложения.

При ручном выборе порога может задаваться отдельно для каждого уровня wavelet-разложения. В качестве примера рассмотрим очистку от шума сигнала

$$s(k) = 4 \sin\left(\frac{\pi k^3}{3N}\right) + e(k)$$

где  $N$  — продолжительность сигнала, в нашем случае, 1024 отсчета;  $k = 1..N$ ;  $e(k)$  — "белый" шум с дисперсией  $\sigma^2$ , равной 1.

Зададим автоматический выбор порога и модификацию wavelet-коэффициентов по правилу "hard" (Automatic hard thresholding), в качестве порога выберем фиксированный порог (Fixed from threshold) а в качестве модели шума примера "белый" шум (Unscaled white noise).

При нажатии на кнопку "Denoise" происходит очистка сигнала от шума в соответствии с заданными параметрами. Оцененный от шума сигнал накладывается на исходный. Так же строится графика wavelet-коэффициентов исходного и очищенного (синтезированного) сигнала. При зачтении окна инструмента удаления шума из сигнала (кнопка "Close") появится диалог с вопросом "Обновить синтезированный сигнал?", если нажать "Yes", то синтезированный сигнал станет доступен в главном окне одномерного дискретного wavelet-анализа, где будет возможно проанализировать его статистико-характеристики.

**Сжатие сигнала**

При сжатии сигнала используют следующую схему: производится wavelet-преобразование исходного сигнала, после чего записываются только значащие коэффициенты, то есть те, которые больше некоторого заданного порога. Восстановление сигнала производится при помощи обратного wavelet-преобразования, при этом нулевые коэффициенты заменяются нулями.

Графический инструмент позволяет производить сжатие с автоматическим (Automatic thresholding) или ручным (Manual thresholding) выбором порога. В последнем случае порог для каждого уровня разложения можно задавать отдельно.

В качестве сигнала для сжатия будем использовать тот же сигнал

$$s(k) = 4 \sin\left(\frac{\pi k^3}{3N}\right) + e(k)$$

Для решения задачи сжатия сигнала следует вызвать соответствующий инструмент (рис. 10) нажатием кноп-ки "Compress", размещенной в середине правой колонки окна, под кнопкой "Analyze".



Рис. 10. Панель инструментов для сжатия сигнала при использовании одномерного дискретного wavelet-преобразования

При автоматическом выборе порога на самом низком уровне отображаются процент сохраненной энергии сигнала и процент нулевых коэффициентов в зависимости от порога (вертикальная линия).

Зададим автоматический выбор порога (automatic thresholding). Значения процента нулевых коэффициентов, в нашем случае, этот порог будет равен 5,326.

Если нажать кнопку "Compress", то после нажатия для вычисления исходный сигнал будет показан красным, а сжатый сигнал — желтым цветом.

Легко видеть, что в процессе сжатия сигнала мы удалили большинство коэффициентов (81,44%), оставив несуществующим значительную часть сигнала.

При закрытии окна инструмента для сжатия сигнала (кнопка "Close") опять появится диалог с вопросом об обновлении синтезированного (сжатого) сигнала.

**Литература**

1. Strang G., Nguyen T. *Wavelets and Filters Banks*. — Wellesley-Cambridge-Press 1996. — 490 p.
2. Daubechies Ingrid. *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
3. Ланц А.П. Введение в теорию базисов вейлетов. — СПб.: ИИЭ-ИО СВНГТУ. — 1999. — 132 с.
4. Michel Missi, Yves Mañi, Georges Oppenheim, Jean-Michel Poggi. *Wavelet Toolbox for Use with Matlab* (User's Guide, version 1). — Boston, MA: The Mathworks, Inc., 1999.
5. Полемкин В.Г. *MATLAB 5 для студентов (Диалог-МИФИ) — 1999. — 447 с.*

arturlan@robotek.ru